出張講演参考資料　　担当：芦野 隆一

平成 16 年 5 月 16 日

1　はじめに

我々が扱っている様々なデータは実数を順序も考えて並べたものである．たとえば，このクラスの数学の成績，東京の月平均気温の記録，あるいは株価の変動など，すべて実数を順序も考えて並べたものといえる．実は，コンピュータで計算できる対象はこのような実数（その中でも限られた有限小数だけ）を順序も考えて並べたものであり，**ディジタルデータ**と呼ばれている．

線形代数からの準備

n を自然数とする．n 個の実数を順序も考えて並べたもの

$$(x_1, x_2, \cdots, x_n)$$

を n 次元**数ベクトル**という．これを $\boldsymbol{x}$ と表す．すなわち，

$$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$$

x_j を**第 j 成分**という．並べる方向は縦でもよい．横に並べた場合を**行ベクトル**，縦に並べた場合を**列ベクトル**という．

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

同様に

$$\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \cdots, y_n)$$

を考える．二つの n 次元数ベクトル $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ の和を

$$\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \cdots, x_n + y_n)$$

とおき（成分ごとに和をとる），実数 a に対して，n 次元数ベクトル $\boldsymbol{x}$ の a 倍を

$$a\boldsymbol{x} = (ax_1, ax_2, \cdots, ax_n)$$

とおく（成分ごとに a 倍する）．

n 次元と呼ばれる理由は，適当な n 個の n 次元数ベクトルの組 $\{\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \cdots, \boldsymbol{b}_n\}$ をうまく選べば，任意の n 次元数ベクトル $\boldsymbol{x}$ に対して，ただ一つの n 次元数ベクトル $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ があって，

$$\boldsymbol{x} = a_1\boldsymbol{b}_1 + a_2\boldsymbol{b}_2 + \cdots + a_n\boldsymbol{b}_n$$

が成り立つことが示せるからである．このような n 個の n 次元数ベクトルの組を**基底**という．

例 1

$$\boldsymbol{e}_1=(1,0,0,\cdots,0),\qquad \boldsymbol{e}_2=(0,1,0,\cdots,0),\qquad \cdots,\qquad \boldsymbol{e}_n=(0,0,\cdots,0,1)$$

とおけば,

$$\boldsymbol{x}=x_1\boldsymbol{e}_1+x_2\boldsymbol{e}_2+\cdots+x_n\boldsymbol{e}_n$$

が成り立つことが示せる.

目的

本講演の目的は次の主張 1 を示すことである.

主張 1　基底 $\{\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\cdots,\boldsymbol{b}_n\}$ をうまく選べば，n 次元数ベクトル $\boldsymbol{x}$ の分解

$$\boldsymbol{x}=a_1\boldsymbol{b}_1+a_2\boldsymbol{b}_2+\cdots+a_n\boldsymbol{b}_n \tag{1}$$

から，$\boldsymbol{x}$ の持つ情報を $(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ から取り出すことができる.

2　ハール変換

このことを示すために，$n=8$ で考えてみよう．8 次元数ベクトルの基底を

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{b}_1=(1,1,1,1,1,1,1,1), && \boldsymbol{b}_2=(1,1,1,1,-1,-1,-1,-1),\\
&\boldsymbol{b}_3=(1,1,-1,-1,0,0,0,0), && \boldsymbol{b}_4=(0,0,0,0,1,1,-1,-1),\\
&\boldsymbol{b}_5=(1,-1,0,0,0,0,0,0), && \boldsymbol{b}_6=(0,0,1,-1,0,0,0,0),\\
&\boldsymbol{b}_7=(0,0,0,0,1,-1,0,0), && \boldsymbol{b}_8=(0,0,0,0,0,0,1,-1)
\end{aligned}$$

と定める．もちろん，この 8 個の 8 次元数ベクトルの組が基底になることは証明を要するが，ここでは認めることにする.

問題 1　任意の 8 次元数ベクトル $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7,x_8)$ に対して，分解の式 (1) を満たすただ一つの 8 次元数ベクトル $(a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6,a_7,a_8)$ を求めよ.

解.　$\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7,x_8)$ から始めて次のように 8 次元数ベクトルを構成すればよい．セミコロンを区切りをわかりやすくするために使って,

$$\begin{aligned}
&(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7,x_8)\\
&\quad\to\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{x_3+x_4}{2},\frac{x_5+x_6}{2},\frac{x_7+x_8}{2};\frac{x_1-x_2}{2},\frac{x_3-x_4}{2},\frac{x_5-x_6}{2},\frac{x_7-x_8}{2}\right)\\
&\quad\to\left(\frac{\frac{x_1+x_2}{2}+\frac{x_3+x_4}{2}}{2},\frac{\frac{x_5+x_6}{2}+\frac{x_7+x_8}{2}}{2};\right.\\
&\qquad\left.\frac{\frac{x_1+x_2}{2}-\frac{x_3+x_4}{2}}{2},\frac{\frac{x_5+x_6}{2}-\frac{x_7+x_8}{2}}{2};\frac{x_1-x_2}{2},\frac{x_3-x_4}{2},\frac{x_5-x_6}{2},\frac{x_7-x_8}{2}\right)\\
&\quad=\left(\frac{x_1+x_2+x_3+x_4}{4},\frac{x_5+x_6+x_7+x_8}{4};\right.
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{x_1+x_2-x_3-x_4}{4}, \frac{x_5+x_6-x_7-x_8}{4}; \frac{x_1-x_2}{2}, \frac{x_3-x_4}{2}, \frac{x_5-x_6}{2}, \frac{x_7-x_8}{2}\Bigg) \\
\to &\Bigg(\frac{\frac{x_1+x_2+x_3+x_4}{4}+\frac{x_5+x_6+x_7+x_8}{4}}{2}; \frac{\frac{x_1+x_2+x_3+x_4}{4}-\frac{x_5+x_6+x_7+x_8}{4}}{2}; \\
&\frac{x_1+x_2-x_3-x_4}{4}, \frac{x_5+x_6-x_7-x_8}{4}; \frac{x_1-x_2}{2}, \frac{x_3-x_4}{2}, \frac{x_5-x_6}{2}, \frac{x_7-x_8}{2}\Bigg) \\
= &\Bigg(\frac{x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6+x_7+x_8}{8}; \frac{x_1+x_2+x_3+x_4-x_5-x_6-x_7-x_8}{8}; \\
&\frac{x_1+x_2-x_3-x_4}{4}, \frac{x_5+x_6-x_7-x_8}{4}; \frac{x_1-x_2}{2}, \frac{x_3-x_4}{2}, \frac{x_5-x_6}{2}, \frac{x_7-x_8}{2}\Bigg) \\
= &(a_1; a_2; a_3, a_4; a_5, a_6, a_7, a_8)
\end{aligned}
$$

実際，このように定めた $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8)$ に対して，分解の式 (1) の右辺を計算すれば左辺に等しいことが示せる．たとえば，式 (1) の右辺の第 1 成分は,

$$
\begin{aligned}
&\frac{x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6+x_7+x_8}{8}+\frac{x_1+x_2+x_3+x_4-x_5-x_6-x_7-x_8}{8} \\
&\qquad+\frac{x_1+x_2-x_3-x_4}{4}+\frac{x_1-x_2}{2} \\
&\quad=\frac{x_1+x_2+x_3+x_4}{4}+\frac{x_1+x_2-x_3-x_4}{4}+\frac{x_1-x_2}{2} \\
&\quad=\frac{x_1+x_2}{2}+\frac{x_1-x_2}{2} \\
&\quad=x_1
\end{aligned}
$$

となる．後は各自に任せる．□

さて，問題 1 の解で使った変形について考えてみよう．それらの変形は次で定義される変換 $(x, y) \to (x', y')$:

$$
\begin{cases}
x' = \dfrac{x+y}{2}, \\
y' = \dfrac{x-y}{2}
\end{cases}
\tag{2}
$$

を繰り返し使っていることに気がつくであろう．この変換は**ハール変換**と呼ばれている．この連立方程式は逆に解くことができて,

$$
\begin{cases}
x = x' + y', \\
y = x' - y'
\end{cases}
\tag{3}
$$

となる．この逆の対応 $(x', y') \to (x, y)$ を**逆ハール変換**と呼ぶ.

3　多重レベルの分解と再構成

このハール変換の意味を考えてみよう．対応

$$
(x_1, x_2) \to \left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{x_1-x_2}{2}\right)
$$

で，$\dfrac{x_1+x_2}{2}$ は x_1 と x_2 の平均であり，$\dfrac{x_1-x_2}{2}$ は x_1 から x_2 に変わるときの変化量を $-\dfrac{1}{2}$ 倍した量である．

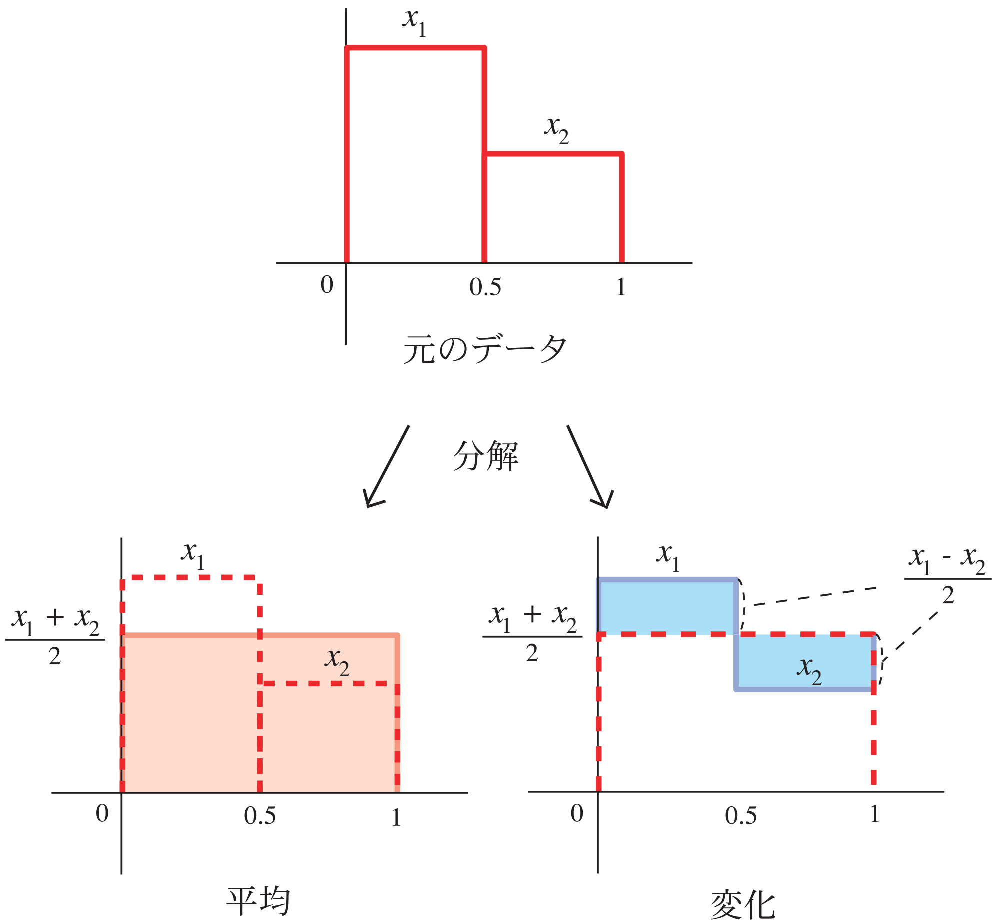

図 1: データを平均と変化への分解

平均と変化への分解

x_1, x_2 を幅 $\dfrac{1}{2}$ の棒グラフで表すと，図 1 の上の図となる．左下のグラフは $\dfrac{x_1+x_2}{2}$ を幅 1 の棒グラフで表した図であり，ちょうど上のグラフと x 軸で囲まれた部分の面積と左下のグラフと x 軸で囲まれた部分の面積は等しくなっている．右下のグラフは $\dfrac{x_1-x_2}{2}$ を幅 1 の棒グラフで表したグラフを平均のグラフの上に乗せた図であり，それはちょうど上のグラフに一致しているので，与えられたデータのグラフを平均のグラフと変化のグラフの和に分解していると考えることができる．

再構成

また，分解で与えられた平均のグラフと変化のグラフを加えると，元のデータが再構成できることは図 2 から容易に理解できよう．

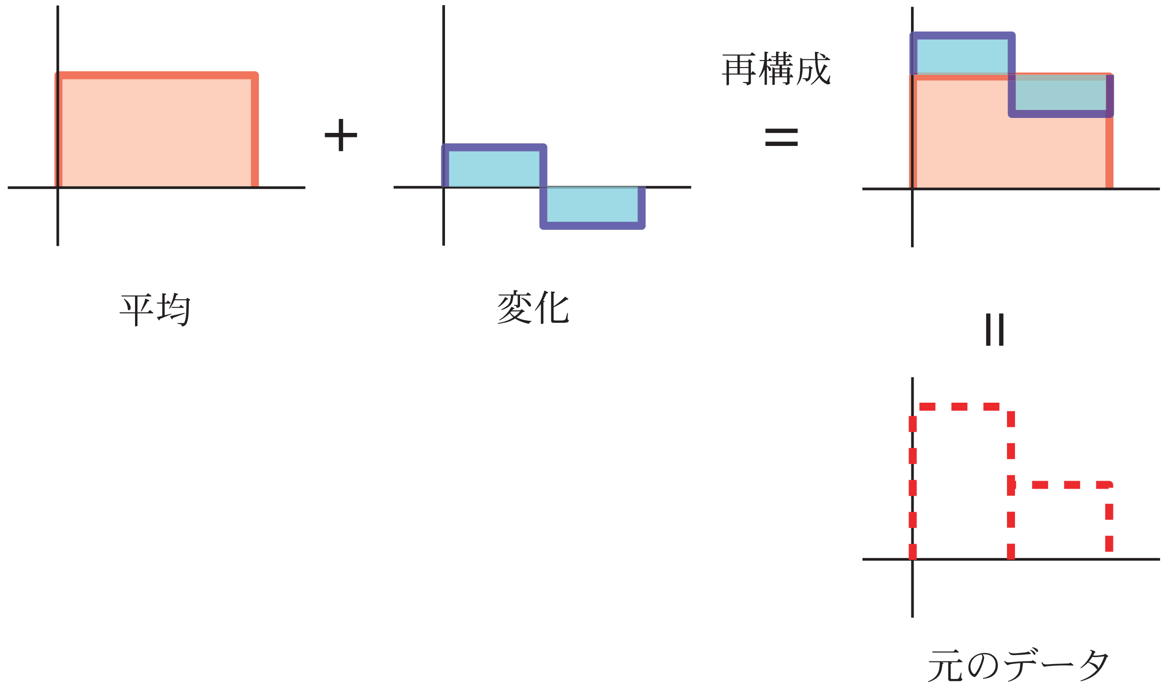

図 2: 平均と変化から元のデータを再構成

多重レベル分解

問題 1 の解で使った変形は，図 3 のように，与えられたデータをハール変換によって平均と変化に分解し，さらに得られた平均を与えられたデータだと思ってハール変換によって平均と変化に分解するという変形を繰り返しているのである．このような分解を**多重レベル分解**という．初めの分解を**レベル 1 の分解**と呼び，以下順にレベル 2 の分解，レベル 3 の分解と呼ぶ．このことにより，与えられたデータを次第に粗い平均といろいろなスケールの変化に分解している．

データ圧縮の原理

例 2　8 次元数ベクトル $\boldsymbol{x} = (3, 1, 0, 4, 8, 6, 9, 9)$ に対して，分解の式 (1) を満たすただ一つの 8 次元数ベクトル $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8)$ を求めてみよう．

$$
\begin{aligned}
(3, 1, 0, 4, 8, 6, 9, 9) &\to (2, 2, 7, 9; 1, -2, 1, 0)\\
&\to (2, 8; 0, -1; 1, -2, 1, 0)\\
&\to (5; -3; 0, -1; 1, -2, 1, 0)
\end{aligned}
$$

初めのレベル 1 の分解 $(3, 1, 0, 4, 8, 6, 9, 9) \to (2, 2, 7, 9; 1, -2, 1, 0)$ を図示すると，図 4 のようになる．

可逆圧縮

元のデータ $(3, 1, 0, 4, 8, 6, 9, 9)$ と最後のレベル 3 の分解 $(5; -3; 0, -1; 1, -2, 1, 0)$ を比較すると，レベル 3 の分解の方が 0 が多いことに注目しよう．多くのデータではこのような分解に

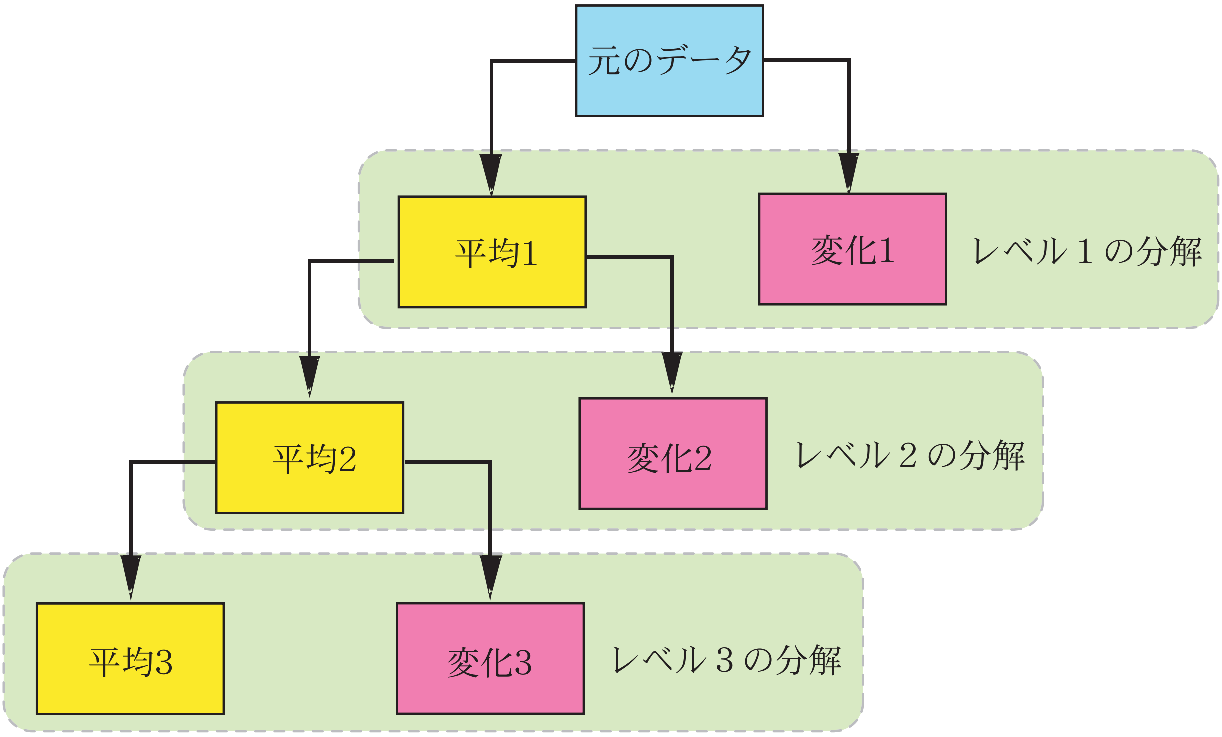

図 3: 多重レベルの分解

よって 0 が増えることが経験的に知られている．実は 0 が多いほどコンピュータに記憶させるのに必要なメモリーが少なくて済む．これがデータ圧縮の原理である．このプロセスを逆にたどることによって，最後のレベル 3 の分解から元のデータが完全に再現できる．このような圧縮を**可逆圧縮**という．ある種のデータ処理を行うことによって 0 を増やしてデータを圧縮する方法は，たとえばモデムによる通信などで使われている．

非可逆圧縮

ここで，最後のレベル 3 の分解 $(5; -3, 0, -1, 1, -2, 1, 0)$ の変化部分 $(*; -3, 0, -1, 1, -2, 1, 0)$ で絶対値の小さい変化を無視してみよう．つまり，$(*; -3, 0, 0, 0, -2, 0, 0)$ とする．そして，レベル 3 の分解 $(5; -3, 0, 0, 0, -2, 0, 0)$ が与えたれたとして元のデータを再構成してみよう．

$$\begin{aligned}(5; -3; 0, 0; 0, -2, 0, 0) &\to (2, 8; 0, 0; 0, -2, 0, 0)\\ &\to (2, 2, 8, 8; 0, -2, 0, 0)\\ &\to (2, 2, 0, 4, 8, 8, 8, 8)\end{aligned}$$

得られた $(2, 2, 0, 4, 8, 8, 8, 8)$ は速くかつ値の小さい変化を無視して再構成したデータとなる．この速くかつ値の小さい変化を無視して再構成したデータと元のデータを比較した図が図 5 である．

分解されたデータを比較すると，元のデータの場合は $(5; -3; 0, -1; 1, -2, 1, 0)$ であり，速くかつ値の小さい変化を無視したデータの場合は $(5; -3; 0, 0; 0, -2, 0, 0)$ である．速くかつ値の小さい変化を無視したデータの方が 0 が多いことに注目しよう．この場合は元のデータを完全に再現できないが，非常に少ないデータ量から元のデータに近いデータを得ることができる．このような圧縮を**非可逆圧縮**という．これと同様なデータ圧縮の原理（Joint Photographic Experts Group で作られた規格のため **JPEG** と呼ばれる）がディジタルカメラなどで使われている．

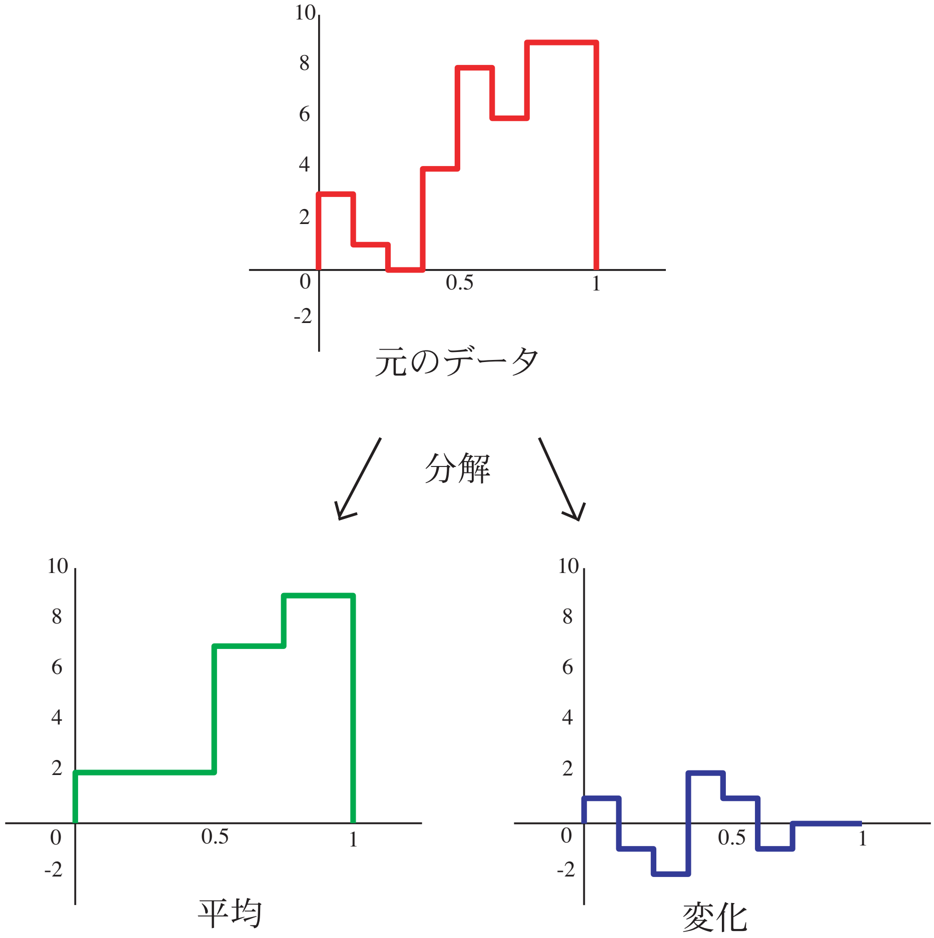

図 4: 例 2 のレベル 1 の分解

4　多重解像度解析

例 3　理科年表 CD-ROM 2000 のサンプルデータ「地球はほんとうに温かくなっているか」を使って調べてみよう．1921 から 1990 までの東京の 30 年間の月別平均気温を表 3 に示す．たとえば，左上隅の数値 3.2 は東京の 1 月の平均気温の 1921 から 1950 までの 30 年間の平均であり，右下隅の数値 7.9 は東京の 12 月の平均気温の 1961 から 1990 までの 30 年間の平均である．

平均	1 月	2 月	3 月	4 月	5 月	6 月	7 月	8 月	9 月	10 月	11 月	12 月
1921–1950	3.2	3.9	7.0	12.8	17.2	20.8	25.1	26.4	22.6	16.4	11.0	5.7
1931–1960	3.7	4.3	7.6	13.1	17.6	21.1	25.1	26.4	22.8	16.7	11.3	6.1
1941–1970	4.1	4.8	7.9	13.5	18.0	21.3	25.2	26.7	23.0	16.9	11.7	6.6
1951–1980	4.7	5.4	8.4	13.9	18.4	21.5	25.2	26.7	22.9	17.3	12.3	7.4
1961–1990	5.2	5.6	8.5	14.1	18.6	21.7	25.2	27.1	23.2	17.6	12.6	7.9

表 1: 東京の 30 年間の月別平均気温 (1921–1990)

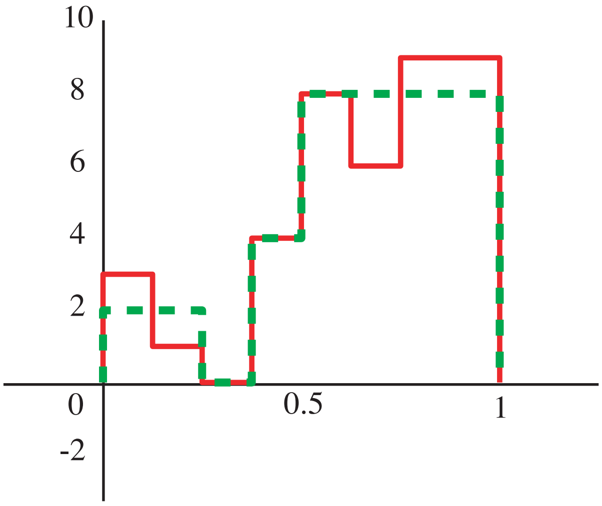

図 5: 例 2 の元のデータと速くかつ値の小さい変化を無視して再構成したデータ

このデータ上の行から順に 1 行に並べかえた行ベクトルを

$$\begin{aligned}\boldsymbol{s} = (&3.2, 3.9, 7, 12.8, 17.2, 20.8, 25.1, 26.4, 22.6, 16.4, 11, 5.7,\\ &3.7, 4.3, 7.6, 13.1, 17.6, 21.1, 25.1, 26.4, 22.8, 16.7, 11.3, 6.1,\\ &4.1, 4.8, 7.9, 13.5, 18, 21.3, 25.2, 26.7, 23, 16.9, 11.7, 6.6,\\ &4.7, 5.4, 8.4, 13.9, 18.4, 21.5, 25.2, 26.7, 22.9, 17.3, 12.3, 7.4,\\ &5.2, 5.6, 8.5, 14.1, 18.6, 21.7, 25.2, 27.1, 23.2, 17.6, 12.6, 7.9)\end{aligned}$$

とおく．この $\boldsymbol{s}$ のハール変換 (2) によるレベル 1 の分解を $\boldsymbol{s} \to (\boldsymbol{a}_1; \boldsymbol{d}_1)$ と表すと，

$$\boldsymbol{a}_1 = \left(\frac{3.2+3.9}{2}, \frac{7+12.8}{2}, \frac{17.2+20.8}{2}, \cdots\right),$$
$$\boldsymbol{d}_1 = \left(\frac{3.2-3.9}{2}, \frac{7-12.8}{2}, \frac{17.2-20.8}{2}, \cdots\right)$$

と計算することになり，

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}_1 = (&3.55, 9.9, 19, 25.75, 19.5, 8.35, 4, 10.35, 19.35, 25.75,\\ &19.75, 8.7, 4.45, 10.7, 19.65, 25.95, 19.95, 9.15, 5.05, 11.15,\\ &19.95, 25.95, 20.1, 9.85, 5.4, 11.3, 20.15, 26.15, 20.4, 10.25),\\ \boldsymbol{d}_1 = (&-0.35, -2.9, -1.8, -0.65, 3.1, 2.65, -0.3, -2.75, -1.75,\\ &-0.65, 3.05, 2.6, -0.35, -2.8, -1.65, -0.75, 3.05, 2.55, -0.35,\\ &-2.75, -1.55, -0.75, 2.8, 2.45, -0.2, -2.8, -1.55, -0.95, 2.8, 2.35)\end{aligned}$$

を得る．

多重レベル分解と再構成

このとき，ベクトル $\boldsymbol{s}$ 次元が 60 であるのに対して，ベクトル $\boldsymbol{a}_1$ とベクトル $\boldsymbol{d}_1$ の次元は 30 となり，ちょうどベクトル $\boldsymbol{s}$ 次元の半分になっていることに注意する．つまり，1 回分解す

るごとにデータ数は半分になるので，このままでは元のデータと比較できない．そこで，レベル１の変化をすべて 0 であるとして，逆ハール変換 (3) によってレベル１の平均だけを使って再構成して得られるベクトルを $a1$ と表すと，$(\boldsymbol{a}_1;\boldsymbol{0}) \to a1$ であり，$a1$ を逆ハール変換 (3) に従って求めると，

$$\begin{aligned} a1 &= (3.55+0,\ 3.55-0,\ 9.9+0,\ 9.9-0,\ \cdots) \\ &= \big(3.55\times(1,1),\ 9.9\times(1,1),\ \cdots\big) \end{aligned}$$

となり，ベクトル $a1$ はベクトル $\boldsymbol{a}_1$ の成分を順に２つずつ並べたベクトルであることがわかる．このようにするとベクトル $a1$ のデータ数は元のデータ $\boldsymbol{s}$ のデータ数と同じになり, 元のデータ $\boldsymbol{s}$ と再構成したデータ $a1$ が比較できる．同様にして，レベル１の平均をすべて 0 であるとして，逆ハール変換 (3) によってレベル１の変化だけを使って再構成して得られるベクトルを $d1$ と表すと，$(\boldsymbol{0};\boldsymbol{d}_1) \to d1$ であり，

$$\begin{aligned} d1 &= (0+(-0.35),\ 0-(-0.35),\ 0+(-2.9),\ 0-(-2.9),\ \cdots) \\ &= \big(-0.35\times(1,-1),\ -2.9\times(1,-1),\ \cdots\big) \end{aligned}$$

となるから，ベクトル $d1$ はベクトル $\boldsymbol{s}_1$ の成分とその成分を -1 倍した数を順に２つずつ並べたベクトルであることがわかる．

レベル２の分解とは $\boldsymbol{a}_1$ にハール変換 (2) によるレベル１の分解を行ったものであるから，レベル２の分解を $\boldsymbol{s} \to (\boldsymbol{a}_2;\boldsymbol{d}_2;\boldsymbol{d}_1)$ と表わし，$\boldsymbol{a}_1 \to (\boldsymbol{a}_2;\boldsymbol{d}_2)$ を使って求めると，

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a}_2 = (&6.725, 22.375, 13.925, 7.175, 22.55, 14.225, 7.575, 22.8, \\ &14.55, 8.1, 22.95, 14.975, 8.35, 23.15, 15.325), \\ \boldsymbol{d}_2 = (&-3.175, -3.375, 5.575, -3.175, -3.2, 5.525, -3.125, -3.15, \\ &5.4, -3.05, -3, 5.125, -2.95, -3, 5.075) \end{aligned}$$

を得る．このレベル２の分解に対して，レベル２の平均以外をすべて 0 であるとして，レベル２の平均だけを使って逆ハール変換 (3) を２回適用して再構成して得られるベクトルを $a2$ と表し，レベル２の変化以外をすべて 0 であるとして，レベル２の変化だけを使って逆ハール変換 (3) を２回適用して再構成して得られるベクトルを $d2$ と表す．すなわち，

$$(\boldsymbol{a}_2;\boldsymbol{0};\boldsymbol{0}) \to a2, \qquad (\boldsymbol{0};\boldsymbol{d}_2;\boldsymbol{0}) \to d2$$

である．

データの拡張

このとき，ベクトル $\boldsymbol{a}_2$ とベクトル $\boldsymbol{d}_2$ の次元は 15 となることに注意しよう．ベクトルの次元が偶数でなければハール変換 (2) を適用することはできないため，さらに分解を続けるためには何らかの方法によりベクトルを拡張して偶数次元にする必要がある．よく使われる拡張方法は次の３つである．拡張するベクトルを $(x_1, x_2, \cdots, x_{2k-1})$ とする．

(1) **周期的拡張**とは，

$$(x_1, x_2, \cdots, x_{2k-1}) \to (\cdots, x_{2k-2}, x_{2k-1}, x_1, x_2, \cdots, x_{2k-1}, x_1, x_2, \cdots)$$

と拡張することである．

(2)　**対称拡張**とは,

$$(x_1, x_2, \cdots, x_{2k-1}) \to (\cdots x_2, x_1, x_1, x_2, \cdots, x_{2k-1}, x_{2k-1}, x_{2k-2}, \cdots)$$

と拡張することである.

(3)　**零拡張**とは,

$$(x_1, x_2, \cdots, x_{2k-1}) \to (\cdots 0, 0, x_1, x_2, \cdots, x_{2k-1}, 0, 0, \cdots)$$

と拡張することである.

拡張する次元は必要に応じて決める．これら３つの拡張を簡単な例で説明しよう．拡張すべきベクトルは 3 次元ベクトル $\boldsymbol{x} = (1, 2, 3)$ であり，7 次元ベクトルに拡張する場合を考える．周期的拡張は $(2, 3, 1, 2, 3, 1, 2)$ であり，対称拡張は $(2, 1, 1, 2, 3, 3, 2)$ であり，零拡張は $(0, 0, 1, 2, 3, 0, 0)$ である.

この例の場合は $\boldsymbol{a}_2$ を対称拡張で 1 次元増やした 16 次元に拡張しよう．すなわち，元のベクトルの最後の成分をもう１つ付け加えて,

$$\begin{aligned}\widetilde{\boldsymbol{a}}_2 = (&6.725, 22.375, 13.925, 7.175, 22.55, 14.225, 7.575, 22.8,\\ &14.55, 8.1, 22.95, 14.975, 8.35, 23.15, 15.325, 15.325),\end{aligned}$$

とするのである．レベル３の分解を $\widetilde{\boldsymbol{a}}_2 \to (\boldsymbol{a}_3; \boldsymbol{d}_3)$ を使って求めると,

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}_3 &= (14.55, 10.55, 18.3875, 15.1875, 11.325, 18.9625, 15.75, 15.325),\\ \boldsymbol{d}_3 &= (-7.825, 3.375, 4.1625, -7.6125, 3.225, 3.9875, -7.4, 0)\end{aligned}$$

を得る.

ベクトルを拡張したため，レベル３からの再構成には注意が必要である．このレベル３の分解に対して，レベル３の変化が 0 であるとして，レベル３の平均だけを使って逆ハール変換 (3) を１回だけ適用して再構成して得られるベクトルを $a3'$ と表し，レベル３の平均が 0 であるとして，レベル３の変化だけを使って逆ハール変換 (3) を１回だけ適用して再構成して得られるベクトルを $d3'$ と表す．すなわち,

$$(\boldsymbol{a}_3; \boldsymbol{0}) \to a3', \qquad (\boldsymbol{0}; \boldsymbol{d}_3) \to d3'$$

である．これらのベクトル $a3'$, $d3'$ の最後の成分を取って 1 次元減らしたベクトルをそれぞれ $a3''$, $d3''$ とおき，さらに逆ハール変換 (3) を２回適用して得られる

$$(a_3''; \boldsymbol{0}; \boldsymbol{0}) \to a3, \qquad (\boldsymbol{0}; d_3''; \boldsymbol{0}) \to d3$$

がレベル３の再構成 $a3$, $d3$ である.

このようにして，レベル３からレベル１までの変化も再構成すると $d3$, $d2$, $d1$ が得られる．この再構成した結果を図示したものが図 6 と図 9 である．レベル３の平均を見ると３つのピークが見えるが，だんだん上昇していることがわかる．このように元のデータではわかりにくいことであっても，レベル３の平均を見ればゆっくりとした変動がわかるし，それぞれのレベルの変化を見ればそれぞれのスケールでの変化もわかるのである.

このようにハール変換 (2) と逆ハール変換 (3) を繰り返し適用して分解と再構成を繰り返せば，与えられたデータを平均といくつかの異なった時間スケールの変化に分解できる．このように分解してデータを解析することを**マルチスケール解析**あるいは**多重解像度解析**という．図 8 のデータは振動がだんだん速くなっているが，その変化が多重解像度解析によって速い振動，中ぐらいの振動，ゆっくりとした振動と順次分解されていることを示している.

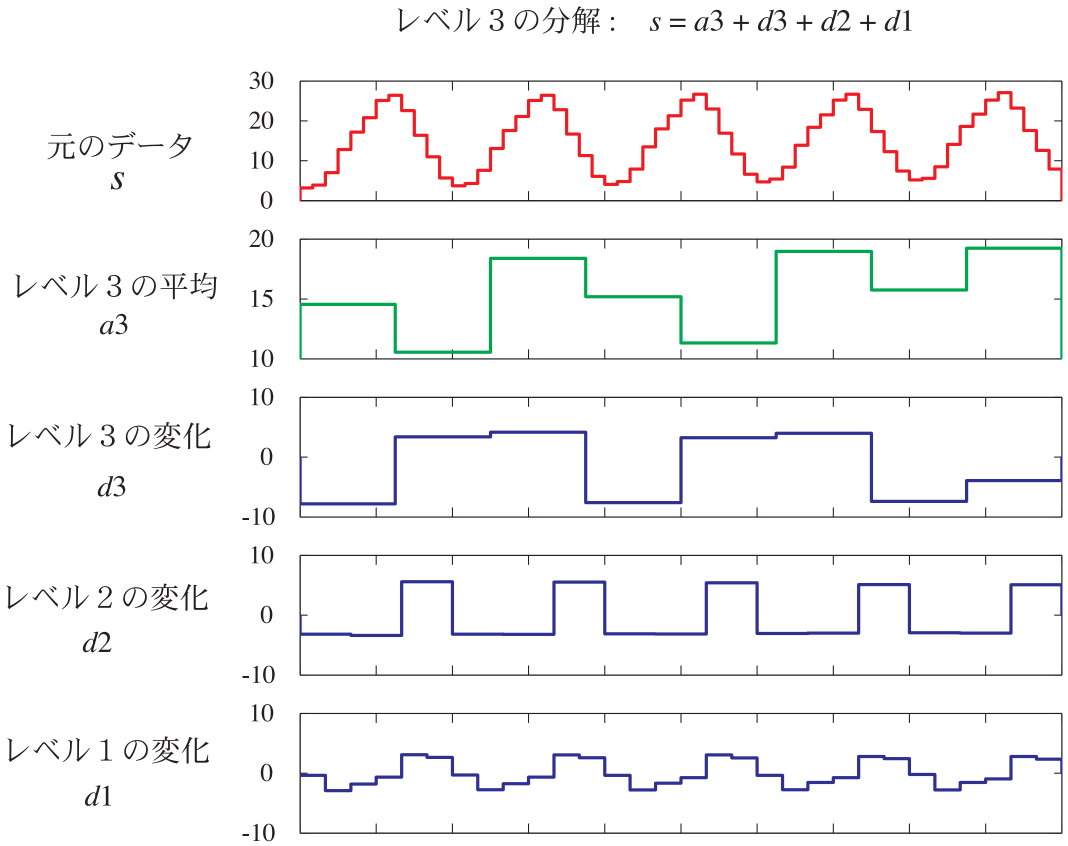

図 6: 例 3 の東京の 30 年間の月別平均気温のレベル 3 の分解（再構成したもの）

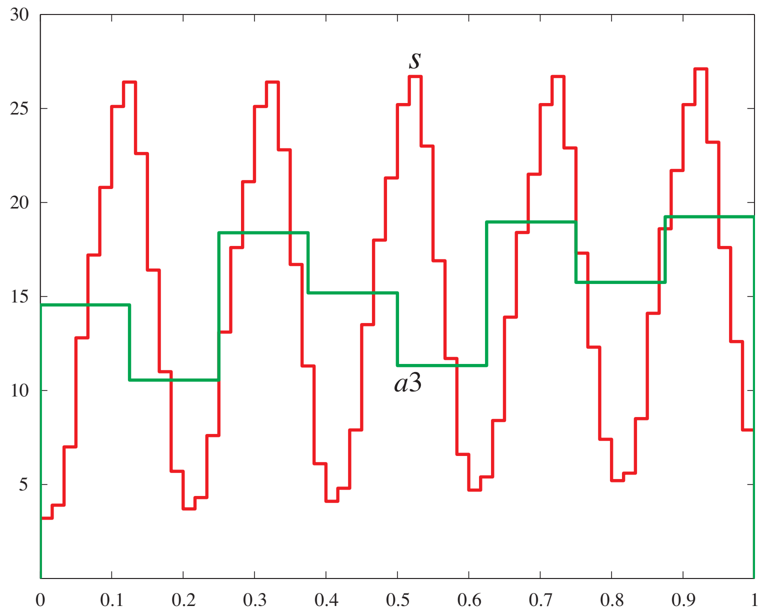

図 7: 例 3 の東京の 30 年間の月別平均気温 s とそのレベル 3 の平均 $a3$

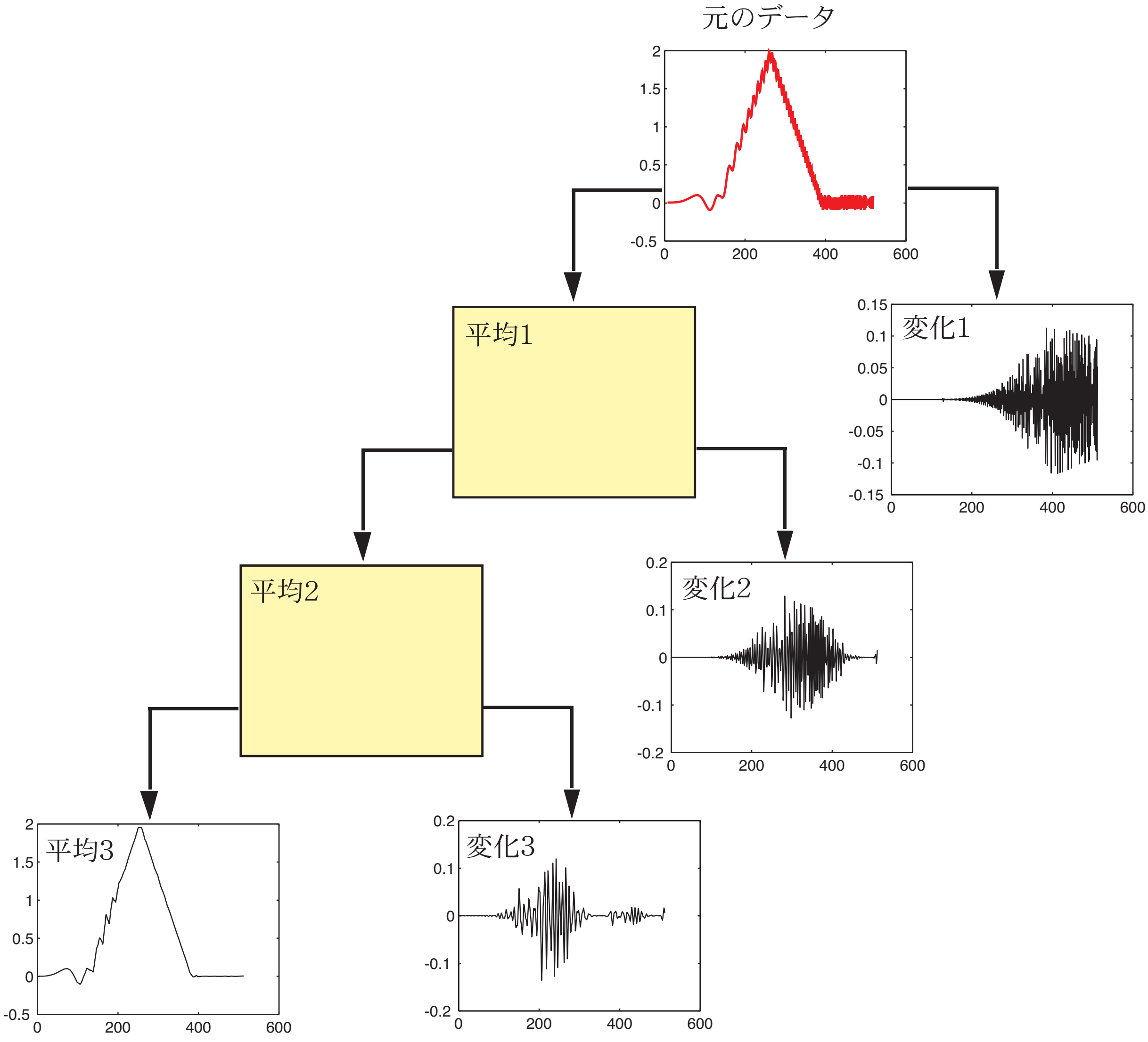

図 8: 多重解像度解析の例

5　２次元データの解析

次に画像について考えてみよう．白黒の**ディジタル画像**とは，0 から 1 までの値の実数を順序も考えて長方形の形に並べたものといえる．数学では，このように実数を順序も考えて長方形の形に並べたものを**行列**という．ディジタル画像ではそれぞれの実数は**画素**または**ピクセル**と呼ばれ，0 は黒に対応し，1 は白に対応する．（図 9 を参照せよ．）灰色は 0 から 1 の間の値に対応する．通常のコンピュータは $2^8 = 256$ 段階（**階調**という）の値しかとれないので，0 から 255 の整数値を並べる場合もある．

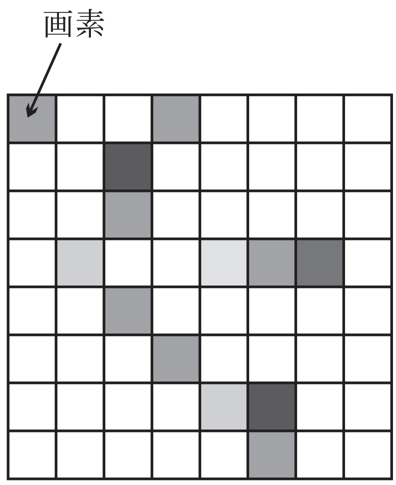

図 9: ディジタル画像の画素

２次元ハール変換

行列に対するハール変換は，行方向に数ベクトルに対するハール変換を適用した後，列方向に数ベクトルに対するハール変換を適用すればよい．この場合，数ベクトルに対するハール変換を初めに列方向に適用してから行方向に適用しても得られる結果は同じである．まず，横に２つの数，縦に２つの数を並べた行列（これを 2×2 **行列**という）に対して，行方向に数ベクトルに対するハール変換を適用すると，

$$\begin{pmatrix} x_{1,1} & x_{1,2} \\ x_{2,1} & x_{2,2} \end{pmatrix} \begin{matrix} \to \\ \to \end{matrix} \begin{pmatrix} \dfrac{x_{1,1}+x_{1,2}}{2} & \dfrac{x_{1,1}-x_{1,2}}{2} \\ \dfrac{x_{2,1}+x_{2,2}}{2} & \dfrac{x_{2,1}-x_{2,2}}{2} \end{pmatrix}$$

となる．次に列方向に数ベクトルに対するハール変換を適用すると，

$$\begin{matrix} \begin{pmatrix} \dfrac{x_{1,1}+x_{1,2}}{2} & \dfrac{x_{1,1}-x_{1,2}}{2} \\ \dfrac{x_{2,1}+x_{2,2}}{2} & \dfrac{x_{2,1}-x_{2,2}}{2} \end{pmatrix} \\ \downarrow \qquad\qquad \downarrow \end{matrix}$$

$$
\begin{pmatrix}
\dfrac{(x_{1,1}+x_{1,2})+(x_{2,1}+x_{2,2})}{4} & \dfrac{(x_{1,1}-x_{1,2})+(x_{2,1}-x_{2,2})}{4} \\
\dfrac{(x_{1,1}+x_{1,2})-(x_{2,1}+x_{2,2})}{4} & \dfrac{(x_{1,1}-x_{1,2})-(x_{2,1}-x_{2,2})}{4}
\end{pmatrix}
$$

となる．つまり，対応

$$
\begin{pmatrix} x_{1,1} & x_{1,2} \\ x_{2,1} & x_{2,2} \end{pmatrix} \quad \to \quad
\begin{pmatrix}
\dfrac{(x_{1,1}+x_{1,2})+(x_{2,1}+x_{2,2})}{4} & \dfrac{(x_{1,1}-x_{1,2})+(x_{2,1}-x_{2,2})}{4} \\
\dfrac{(x_{1,1}+x_{1,2})-(x_{2,1}+x_{2,2})}{4} & \dfrac{(x_{1,1}-x_{1,2})-(x_{2,1}-x_{2,2})}{4}
\end{pmatrix}
$$

が 2×2 行列に対するハール変換である．

例 4　与えられた画像すなわち行列を 2×2 行列に分割し，それぞれの行列に上の行列に対するハール変換を適用する．得られる結果は 2×2 行列であり，それぞれの 2×2 行列から左上，右上，左下，右下を取り出して，左上の数だけからなる行列，右上の数だけからなる行列，左下の数だけからなる行列，右下の数だけからなる行列を作ると図 10 が得られる．これがレベル１の分解であり，再構成していないため，それぞれの左上の数だけからなる行列，右上の数だけからなる行列，左下の数だけからなる行列，右下の数だけからなる行列に並べられた画素数は元の画像の画素数の４分の１になっている．

元の画像　　　　レベル１の分解

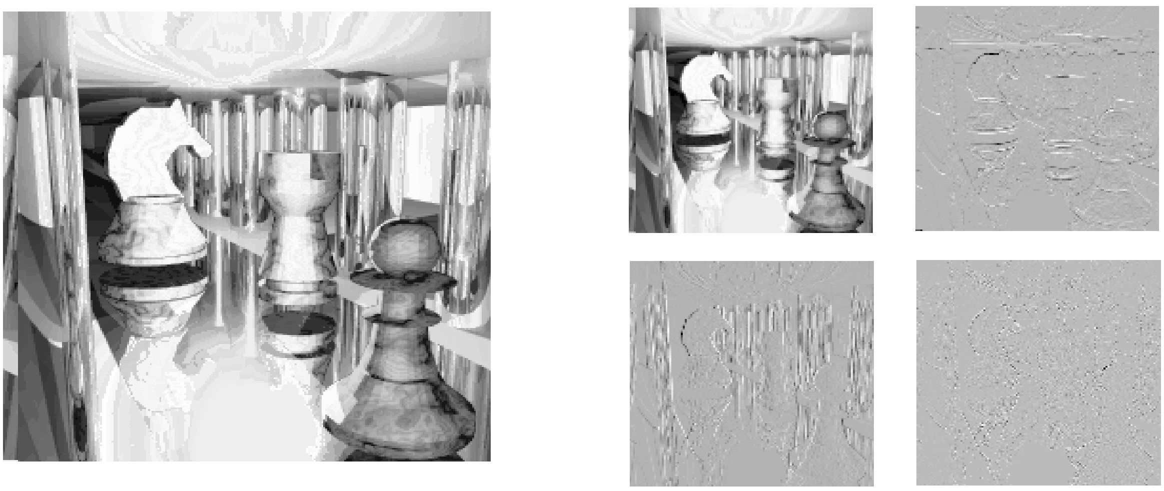

図 10: ハール変換の画像への適用例