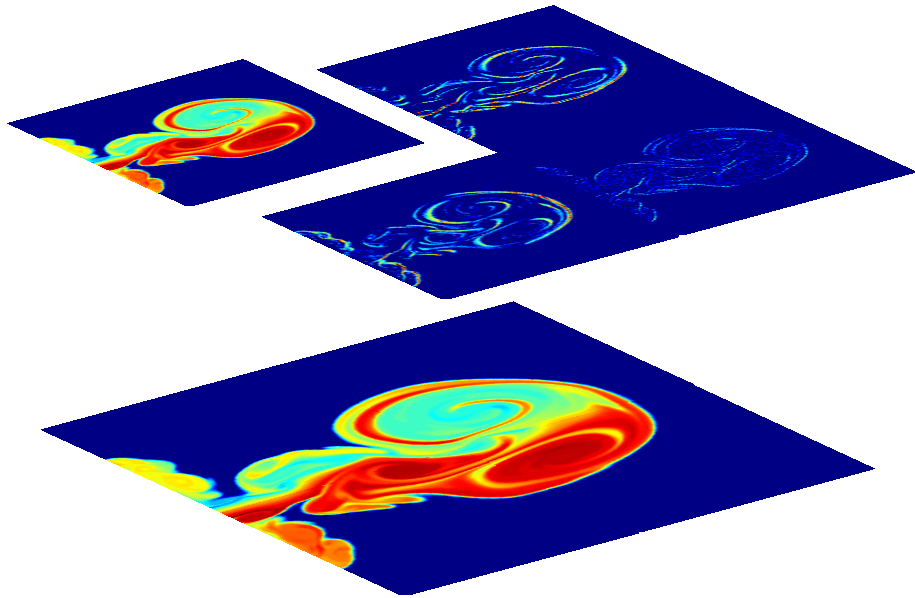


KFR 第 257 回例会

ウェーブレットの数理と応用

大阪教育大学 数理科学 芦野 隆一



ウェーブレット解析で何ができるのか？

「時間スケール解析」

信号処理（解析）や画像処理の新しい道具

ウェーブレット変換

→
離散化

ウェーブレット展開

信号のいろいろなスケールの情報にアクセス

信号を時間周波数分解
エネルギーも分解

マルチスケール解析

← 近似 詳細 →

信号の時間周波数情報を2次元表示

信号の時間周波数情報をデータ処理

再構成

↓
情報の可視化

↓
データ操作

情報の過剰性

(近似) (詳細)
雑音除去 特異性の検出
データ圧縮

データ解析とパターン認識がしやすくなる

多くの情報が必要
効率的とはいえない。

周波数領域では
Logスケール
大きな領域をカバー
人間の感覚に近い

効率的なウェーブレット変換は？

→

ウェーブレット展開

1. 時間周波数解析

- ヒルベルト空間 $L^2(\mathbb{R})$

$$L^2(\mathbb{R}) := \{f \mid \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 dx < +\infty\}$$

$$(f, g) := \int_{\mathbb{R}} f(x) \overline{g(x)} dx, \quad \|f\| := \sqrt{(f, f)}.$$

- 関数 f のフーリエ変換と関数 g の逆フーリエ変換を

$$\mathcal{F}[f(x)](\xi) = \hat{f}(\xi) := \int e^{-ix\xi} f(x) dx$$

$$\mathcal{F}^{-1}[g(\xi)](x) := \frac{1}{2\pi} \int e^{ix\xi} g(\xi) d\xi$$

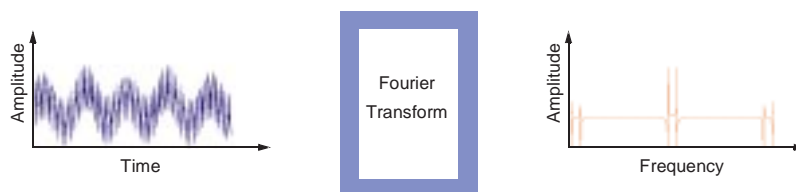
- パーシバルの等式

$$(f, g) = \frac{1}{2\pi} (\hat{f}, \hat{g}), \quad f, g \in L^2(\mathbb{R})$$

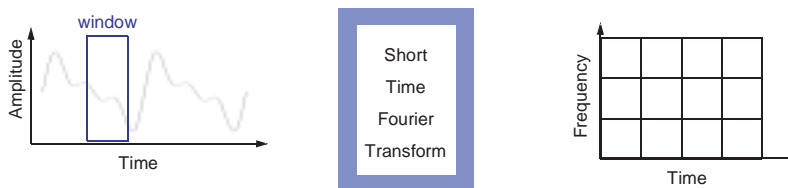
- $w(x) \in L^2(\mathbb{R})$ が窓関数 $\iff xw(x) \in L^2(\mathbb{R})$.

- f の窓関数 $w(x)$ による窓フーリエ変換 $\iff \mathcal{F}[f(x)\overline{w(x-b)}]$

Fourier Analysis



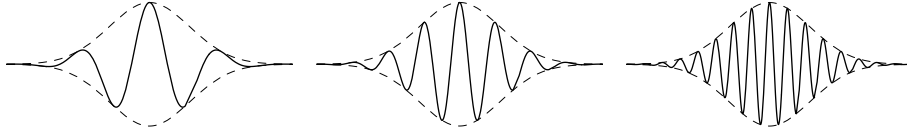
Windowed Fourier Analysis



- $\mathcal{F}[f(x)\overline{w(x-b)}](\omega) = (f, W_{b,\omega}), \quad W_{b,\omega}(x) := e^{i\omega x} w(x-b)$

ω を取り替えて $\text{Re } W_{b,\omega}$ を図示

- $(f, W_{b,\omega}) = (\hat{f}, V_{b,\omega}), \quad V_{b,\omega}(\xi) := \frac{1}{2\pi} \widehat{W_{b,\omega}}(\xi) = \frac{e^{i\omega b}}{2\pi} e^{-i\xi b} \hat{w}(\xi - \omega)$

FIGURE 1. $\operatorname{Re} W_{b, \omega}$ の概形

- f の点 $x = \tilde{b}$ の近傍における情報と \hat{f} の点 $\xi = \tilde{\omega}$ の近傍における情報を関数 f から同時に取り出す

▷ f を点 $(x, \xi) = (\tilde{b}, \tilde{\omega})$ の近傍に超局所化

2. フーリエ解析の不確定性原理

- f の台 (support) $\iff \overline{\{x \in \mathbb{R}; f(x) \neq 0\}}$
- コンパクト集合 \iff 有界閉集合
- f と \hat{f} の台がコンパクト $\implies f \equiv 0$
- 関数 $W_{b, \omega}$ と $V_{b, \omega}$ で f から本質的に切り出される部分はどこか?

窓関数 $w(x)$ の中心 \iff

$$x^* := \frac{1}{\|w\|^2} \int_{\mathbb{R}} x |w(x)|^2 dx$$

窓関数 $w(x)$ の幅 \iff

$$\Delta_w := \frac{1}{\|w\|} \left(\int_{\mathbb{R}} (x - x^*)^2 |w(x)|^2 dx \right)^{1/2}$$

- 窓関数 $w(x)$ の時間周波数の窓 $\iff (x, \xi)$ -平面で考えた長方形領域
 $[x^* + b - \Delta_w, x^* + b + \Delta_w] \times [\omega^* + \omega - \Delta_{\hat{w}}, \omega^* + \omega + \Delta_{\hat{w}}]$

▷ 時間周波数の窓の形は窓関数だけから決まってしまう, (b, ω) を動かしても平行移動するだけである.

- フーリエ解析の不確定性原理

$$\Delta_w \Delta_{\hat{w}} \geq 1/2$$

等号成立は $w(x)$ が

$$w(x) = c e^{iax} g_{\alpha}(x - b), \quad c \neq 0, \quad a, b \in \mathbb{R}$$

の形のときに限る.

$$g_{\alpha}(x) := \frac{1}{2\sqrt{\pi\alpha}} e^{-x^2/4\alpha}, \quad \alpha > 0$$

- 高い振動数のところでは短時間, 低い振動数のところでは長時間となるように, 運動に応じた時間周波数の窓の形を変えたい.

▷ 窓関数にパラメータを入れて変化させる. \implies ウェーブレット変換

- 短時間フーリエ変換で

$$w(x) = \psi_a(x),$$

$$\psi_a(x) := a^{-1/2}\psi(x/a)$$

とおいた場合の $(f, W_{b,0})$ がウェーブレット変換

a を取り替えて $\psi_a(x)$ を図示 .



FIGURE 2. $\psi_a(x)$ の概形

▷ a を取り替えても，振動の数はかわらず形が一定 .

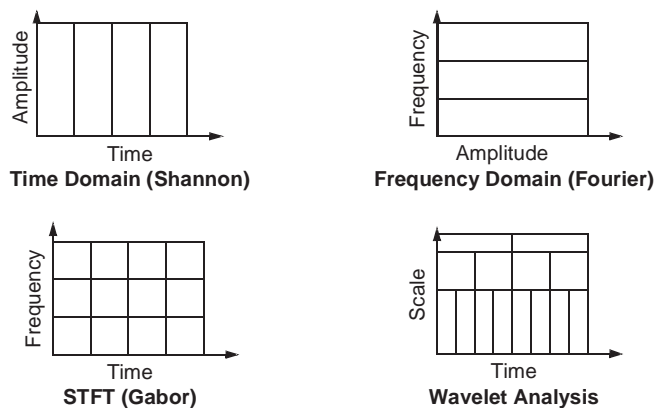


FIGURE 3. いろいろなタイリング

3. ウェーブレット変換とウェーブレット展開の定義

- $\psi(x)$ がアナライジングウェーブレット

⇔ $\psi(x)$ と $\hat{\psi}(\xi)$ は窓関数であって，

$$\int_0^{+\infty} |\hat{\psi}(\xi)|^2 / \xi d\xi = \int_0^{+\infty} |\hat{\psi}(-\xi)|^2 / \xi d\xi = \frac{1}{2} C_\psi < +\infty.$$

(これは逆変換が定義できる条件)

▷ さらに， $|\hat{\psi}(\xi)|$ が原点で連続なら

$$\widehat{\psi}(0) = 0 \iff \int_{\mathbb{R}} \psi(x) dx = 0.$$

- メキシカンハット関数

$$\psi(x) = \frac{2}{\sqrt{3}} \pi^{-\frac{1}{4}} (1-x^2) e^{-\frac{1}{2}x^2}.$$

$-\frac{d^2}{dx^2}(e^{-\frac{1}{2}x^2})$ を $L^2(\mathbb{R})$ で正規化した関数 . メキシカンハット関数 ψ のフーリエ変換は

$$\widehat{\psi}(\xi) = \frac{2}{\sqrt{3}} \pi^{-\frac{1}{4}} \sqrt{2\pi} \xi^2 e^{-\frac{1}{2}\xi^2}.$$

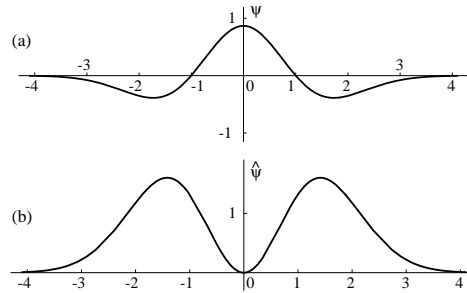


FIGURE 4. メキシカンハット関数とそのフーリエ像

- ψ : アナライジングウェーブレットのとき , $f \in L^2(\mathbb{R})$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a > 0$ に対し ,

$$(W_{\psi}f)(b, a) := \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{\mathbb{R}} f(x) \overline{\psi\left(\frac{x-b}{a}\right)} dx$$

をウェーブレット係数 .

$$f(x) \mapsto (W_{\psi}f)(b, a)$$

をウェーブレット変換 .

- 窓関数 $\psi_1 = \psi$ の中心を x^* , 幅を Δ_{ψ} , 窓関数 $\widehat{\psi}$ の中心を ω^* , 幅を $\Delta_{\widehat{\psi}}$

$$\implies \text{窓関数 } \psi_a \text{ の中心は } ax^* \text{ , 幅が } a\Delta_{\psi} \text{ , 窓関数 } \widehat{\psi}_a \text{ の中心は } \omega^*/a \text{ , 幅が } \Delta_{\widehat{\psi}}/a$$

▷ ウェーブレット変換の時間周波数の窓は

$$[b + ax^* - a\Delta_{\psi}, b + ax^* + a\Delta_{\psi}] \times [\omega^*/a - \Delta_{\widehat{\psi}}/a, \omega^*/a + \Delta_{\widehat{\psi}}/a]$$

- 逆ウェーブレット変換 :

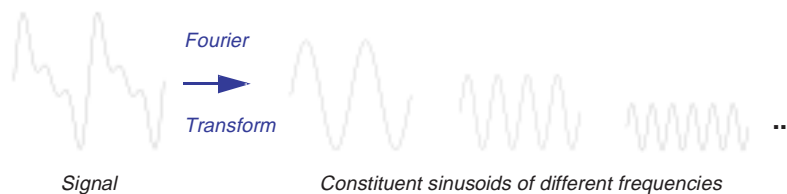
$f(x) \in L^2(\mathbb{R})$ の連続点で $x \in \mathbb{R}$

$$f(x) = \frac{2}{C_{\psi}} \int_0^{+\infty} \left[\int_{\mathbb{R}} (W_{\psi}f)(b, a) \frac{1}{\sqrt{a}} \psi\left(\frac{x-b}{a}\right) db \right] \frac{da}{a^2}.$$

b は時間 , $\frac{1}{a}$ は周波数 ,

$$d\left(\frac{1}{a}\right) = -\frac{1}{a^2} da$$

$$\text{Fourier Transform } F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt$$



Continuous Wavelet Transform

$$C(\text{scale}, \text{position}) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\psi(\text{scale}, \text{position}, t)dt$$

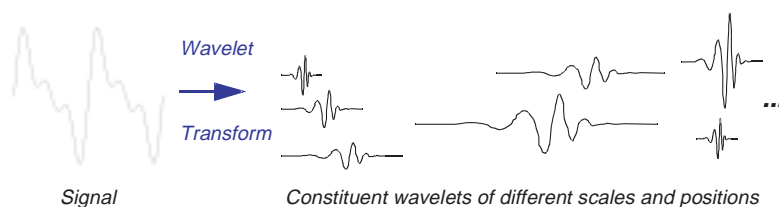


FIGURE 5. フーリエ変換とウェーブレット変換

▷ 積分は時間と周波数に関する積分 .

- ウェーブレット変換は 1 変数関数を 2 変数関数に変換 .
 - ▷ 解析する信号の情報を過剰に含んでいる .
 - ▷ 情報の繰返しによってデータが解析しやすくなったり , パターンを認識しやすくなる利点がある .
 - ▷ 多くの情報を必要とするので効率的とはいえない .

- 数値解析を行うには (b, a) を離散化して積分 .

$$\implies (b, a) = \left(\frac{k}{2^j}, \frac{1}{2^j} \right), \quad j, k \in \mathbb{Z}$$

- ▷ 刻みを $\frac{1}{2^j}$ とすることは高速フーリエ変換で重要 .
- ▷ 音楽のオクターブにも関係 .

- 効率的なウェーブレット変換 \implies ウェーブレットによる正規直交基底の構成 .

- $f_{jk}(x) := 2^{j/2} f(2^j x - k), \quad j, k \in \mathbb{Z} \implies \|f_{jk}\| = \|f\|$
- $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ をウェーブレット関数 $\iff \{\psi_{jk}\}_{j,k \in \mathbb{Z}}$ が $L^2(\mathbb{R})$ の正規直交基底 .

- $f \in L^2(\mathbb{R})$ の正規直交基底 $\{\psi_{jk}\}_{j,k \in \mathbb{Z}}$ に関する展開

$$f = \sum_{j,k \in \mathbb{Z}} (f, \psi_{jk}) \psi_{jk}$$

をウェーブレット展開 .

- 応用上, ウェーブレットには次のような条件を課することが多い .

(i) 局所性 (localization):

$$\forall \ell \in \mathbb{N}, \exists C_\ell; |\psi(x)| \leq C(1 + |x|)^{-\ell}.$$

(ii) バニシングモーメント (vanishing moments):

$$\exists L \in \mathbb{Z}_+ := \mathbb{N} \cup \{0\}, 0 \leq \forall \ell \leq L;$$

$$\int_{\mathbb{R}} x^\ell \psi(x) dx = 0.$$

(iii) 正則性 (regularity):

$$\exists r \in \mathbb{Z}_+; \psi \in C^r(\mathbb{R}).$$

- バニシングモーメント \implies

$$(f, \psi_{jk}) = (R_N, \psi_{jk}), \quad N - 1 \leq L$$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)(x - x_0)^k + R_N(x).$$

▷ R_N つまり $f^{(N)}$ の特異性が検出できる .

- ウェーブレット関数 ψ はスケーリング関数と呼ばれる別の関数 φ から構成するとよい .

- スケーリング関数は次の伸張方程式を満たす :

$$\varphi(x) = 2 \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k \varphi(2x - k)$$

$$h_k := (\varphi(x), \varphi(2x - k))$$

▷ $\{h_k\}$ を決めると φ が決まる .

- ウェーブレット関数は次のウェーブレット方程式を満たす :

$$\psi(x) = 2 \sum_{k \in \mathbb{Z}} g_k \varphi(2x - k)$$

$$g_k := (\psi(x), \varphi(2x - k))$$

▷ $\{g_k\}$ は $g_k := (-1)^{1-k} \overline{h_{1-k}}$ で与えられる .

▷ スケーリング関数とウェーブレット関数から, それぞれローパスフィルタとハイパスフィルタが作れる .

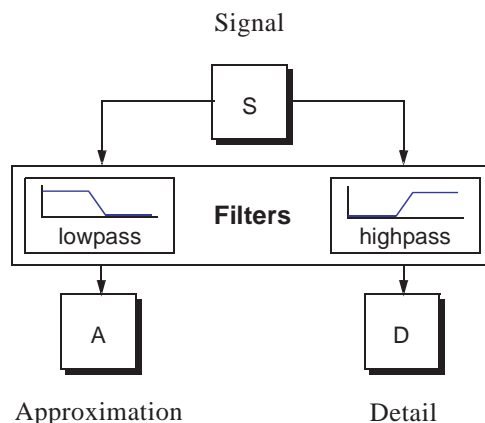


FIGURE 6. ローパスフィルタとハイパスフィルタ

- $\{\varphi_{j_0 k}\}_{k \in \mathbb{Z}} \cup \{\psi_{j k}\}_{j \geq j_0, k \in \mathbb{Z}}$ が $L^2(\mathbb{R})$ の正規直交基底 .

- 正規直交基底 $\{\varphi_{j_0 k}\}_{k \in \mathbb{Z}} \cup \{\psi_{j k}\}_{j \geq j_0, k \in \mathbb{Z}}$ に関する展開

$$f = \sum_{k \in \mathbb{Z}} (f, \varphi_{j_0 k}) \varphi_{j_0 k} + \sum_{j \geq j_0, k \in \mathbb{Z}} (f, \psi_{j k}) \psi_{j k}$$

もウェーブレット展開 .

- $V_j := \overline{\text{Span}} \{\varphi_{j k}\}_{k \in \mathbb{Z}}, \quad W_j := \overline{\text{Span}} \{\psi_{j k}\}_{k \in \mathbb{Z}}.$

$$\implies L^2(\mathbb{R}) = V_{j_0} \oplus (\oplus_{j \geq j_0} W_j).$$

- ウェーブレット $\psi_{j k}$ のフーリエ像は

$$\widehat{\psi_{j k}} = \int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi} 2^{j/2} \psi(2^j x - k) dx = 2^{-j/2} e^{-ik\xi/2^j} \widehat{\psi}(\xi/2^j).$$

$$\implies \text{supp } \widehat{\psi_{j_0 k}} = \text{supp } \widehat{\psi_{j_0 0}}.$$

- 関数 f のウェーブレット展開の各項 $(f, \psi_{j k}) \psi_{j k}$ は ,
 j を固定して $k \in \mathbb{Z}$ を動かすとき , 関数 f を
 ▷ x 空間 (時間領域) において $k/2^j$ 刻みで局所化 .
 ▷ ξ 空間 (周波数領域) では , 関数 $\widehat{\psi}(\xi/2^j)$ で切り落とされる部分に局所化 .
 \implies ウェーブレット展開は時間周波数解析の道具 .

4. フィルタ

- 線形で時間不変な線形作用素 L をフィルタ (filter) .

$$\forall T, g(x) = L[f(x)] \implies g(x - T) = L[f(x - T)]$$

\mathbb{Z} 上の数列 $x = \{x_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ を変換する離散フィルタを扱う .

- 数列 $h = \{h_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ があって , 合成積 $(h * x)_n := \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_{n-k} x_k$ で定義される

$$H : \{x_n\}_{n \in \mathbb{Z}} \mapsto (h * x)_n$$

をデジタルフィルタ (digital filter) .

- 作用素 $S : \{x_n\}_{n \in \mathbb{Z}} \mapsto \{x_{n-1}\}_{n \in \mathbb{Z}}$ をシフト作用素

$$(h * x)_n = (x * h)_n = \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k x_{n-k} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k S^k x_n$$

$$\implies H = \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k S^k$$

- 関数 $f(x)$ に対するシフト作用素 S の作用を

$$Sf(x) = f(x-1)$$

で定義

$$Hf = \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k f(x-k)$$

▷ ウェーブレット展開はデジタルフィルタと思える .

- 簡単のため, $f \in V_1$ とする . $V_1 = V_0 \oplus W_0$.

▷ f の V_0 への正射影 $\pi_{V_0} f$ は, $h_f = \{(h_f)_n := (f, \varphi_{0n})\}_{n \in \mathbb{Z}} \in \ell^2(\mathbb{Z})$ に対し,

$$\pi_{V_0} f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} (h_f)_k \varphi(x-k) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} (h_f)_k S^k \varphi(x)$$

▷ f の W_0 への正射影 $\pi_{W_0} f$ は, $g_f = \{(g_f)_n := (f, \psi_{0n})\}_{n \in \mathbb{Z}} \in \ell^2(\mathbb{Z})$ に対し,

$$\pi_{W_0} f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} (g_f)_k \psi(x-k) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} (g_f)_k S^k \psi(x)$$

$\implies V_0$ への正射影 $\pi_{V_0} f$ とは, デジタルフィルタ $h_f \in \ell^2(\mathbb{Z})$ のスケーリング関数 $\varphi(x)$ への作用

$$m_0(f)(\xi) := \sum_{k \in \mathbb{Z}} (h_f)_k e^{-ik\xi},$$

$$m_1(f)(\xi) := \sum_{k \in \mathbb{Z}} (g_f)_k e^{-ik\xi}$$

とおくと, 正射影の式のフーリエ変換は

$$\mathcal{F}[\pi_{V_0} f](\xi) = m_0(f)(\xi) \widehat{\varphi}(\xi),$$

$$\mathcal{F}[\pi_{W_0} f](\xi) = m_1(f)(\xi) \widehat{\psi}(\xi).$$

- $\varphi, \psi \in V_1$ を V_1 の正規直交基底 $\{\varphi_{1k}\}_{k \in \mathbb{Z}}$ で展開し, フーリエ変換すると

$$\widehat{\varphi}(\xi) = m_0(\xi/2) \widehat{\varphi}(\xi/2),$$

$$\widehat{\psi}(\xi) = m_1(\xi/2) \widehat{\varphi}(\xi/2).$$

である . したがって

$$\mathcal{F}[\pi_{V_0} f](\xi) = m_0(f)(\xi) m_0(\xi/2) \widehat{\varphi}(\xi/2),$$

$$\mathcal{F}[\pi_{W_0} f](\xi) = m_1(f)(\xi) m_1(\xi/2) \widehat{\varphi}(\xi/2).$$

- V_0 への正射影と W_0 への正射影の効果は, $m_0(\xi/2) \widehat{\varphi}(\xi/2)$ と $m_1(\xi/2) \widehat{\varphi}(\xi/2)$ を調べればよい .

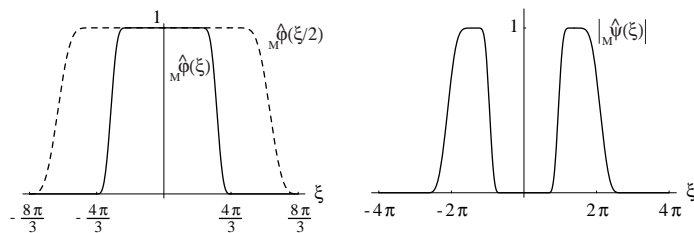


FIGURE 7. Meyer のスケーリング関数とウェーブレット関数のフーリエ像

- ▷ m_0 は低周波部分を切り落すのでローパスフィルタ .
- ▷ m_1 は高周波部分を切り落すのでハイパスフィルタ .

5. 高速ウェーブレット変換アルゴリズム

- このアルゴリズムが高速である理由： 初めに $f \in V_{j_0}$ を仮定し，さらにウェーブレット展開係数 $(f, \varphi_{j_0 k})$ を計算せずに，関数 f の標本値で近似するため .

- ▷ j が大きいとき， $2^j \overline{\varphi(2^j x)} \approx \delta(x)$
- ▷ 積分 $2^{j/2} (f, \varphi_{j,k})$ の値を $f(k\Delta)$ で近似してよい .

- 整数 $j, k \in \mathbb{Z}$ に対し，

$$S_{j,k} := 2^{j/2} (f, \varphi_{jk}), \quad D_{j,k} := 2^{j/2} (f, \psi_{jk})$$

- $\{S_{j,k}\}_{k \in \mathbb{Z}}$ と $\{D_{j,k}\}_{k \in \mathbb{Z}}$ は， $\{S_{j+1,k}\}_{k \in \mathbb{Z}}$ から

$$S_{j,k} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \overline{h_{n-2k}} S_{j+1,n},$$

$$D_{j,k} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \overline{g_{n-2k}} S_{j+1,n}$$

により計算できる .

- $\{S_{j+1,k}\}_{k \in \mathbb{Z}}$ は， $\{S_{j,k}\}_{k \in \mathbb{Z}}$ と $\{D_{j,k}\}_{k \in \mathbb{Z}}$ から

$$S_{j+1,k} = 2 \sum_{n \in \mathbb{Z}} h_{k-2n} S_{j,n} + 2 \sum_{n \in \mathbb{Z}} g_{k-2n} D_{j,n}$$

により計算できる .

- ▷ $\{S_{j,k}\}_{k \in \mathbb{Z}}$ と $\{D_{j,k}\}_{k \in \mathbb{Z}}$ のデータ数は，それぞれ $\{S_{j+1,k}\}_{k \in \mathbb{Z}}$ のデータ数のほぼ半分 .

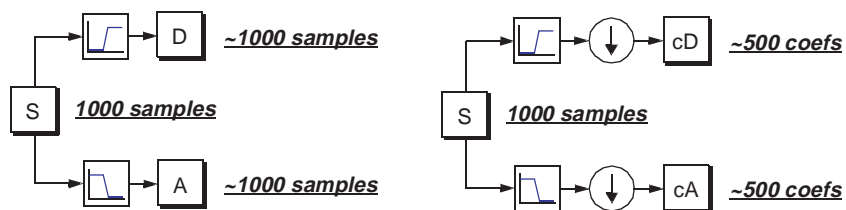


FIGURE 8. 近似と詳細およびそれぞれの係数

- 具体的な信号 $f(x)$ の処理手順：
 - (1) $\Delta \approx 2^{-j_0}$ が成り立つように，適当に j_0 をとる .
 - (2) $f(k\Delta) = 2^{j_0/2} (f, \varphi_{j_0,k}) = S_{j_0,k}$ とおく .

- [16] Burrus, Gopinath, and Guo, *Introduction to Wavelets and Wavelet Transforms, A Primer*, Prentice-Hall, 1998.
- [17] Cohen and Ryan, *Wavelets and Multiscale Signal Processing*, Chapman & Hall, 1995.
- [18] Daubechies, *Ten Lectures on Wavelets*, SIAM, 1992.
- [19] Daubechies (ed.), *Different Perspectives on Wavelets*, Proc. Sympos. Appl. Math., Vol. 47, AMS, 1993.
- [20] David, *Wavelets and Singular Integrals on Curves and Surfaes*, Lecture Notes Math. 1465, Springer-Verlag, 1991.
- [21] Gasquet and Witomski, *Analyse de Fourier et Applications: Filtrage, Calcul numérique, Ondelettes*, Masson, 1990.
- [22] Hernández and Weiss, *A First Course on Wavelets*, CRC Press, 1996. (日本語訳は [3])
- [23] Holschneider, *Wavelets: An Analysis Tool*, Oxford, 1995.
- [24] Hubbard, *The World According to Wavelets*, A K Peters, 1996.
- [25] Kahane and Lemarié-Rieusset, *Fourier Series and Wavelets*, Gordon and Breach Publisers, 1995.
- [26] Mallat, *A Wavelet Tour of Signal Processing*, Academic Press, 1998.
- [27] Meyer, *Wavelets and Operators*, Cambridge University Press, 1992.
- [28] Meyer, *Wavelets: Algorithms and Applications*, SIAM, 1993.
- [29] M. Misiti, Y. Misiti, Oppenheim, and Poggi, *Wavelet Toolbox User's Guide*, The MathWorks, 1996.
- [30] Newland, *An Intorduction to Random Vibrations, Spectral and Wavelet Analysis*, 3rd ed., Addison Wesley Longman, 1993.
- [31] Riesz and Sz-Nagy, *Functional Analysis*, Dover, New York, 1990.
- [32] Strang and Nguyen, *Wavelets and Filter Banks*, Wellesley-Cambridge Press, 1996.
- [33] Vaidyanathan, *Multirate Systems and Filter Banks*, Prentice-Hall, 1992. (日本語訳は [10])
- [34] Walter, *Wavelets and Other Orthogonal Systems with Applications*, CRC-Press, 1994.
- [35] Wickerhauser, *Adapted Wavelet Analysis from Theory to Software*, A K Peters, 1994.