

# 超局所解析とマルチウェーブレット

Ryuichi ASHINO ( 芦野 隆一 )  
大阪教育大学 数理科学  
E-mail: ashino@cc.osaka-kyoiku.ac.jp

故 岩崎 敷久教授に捧ぐ

## アブストラクト

ここに述べた結果は, Christopher HEIL, Takeshi MANDAI ( 萬代 武史 ), Michihiro NAGASE ( 長瀬 道弘 ), Rémi VAILLANCOURT 達との共同研究の結果をまとめたものであり, 未発表の結果も含んでいる.

複数のスケーリング関数から構成される正規直交マルチウェーブレットによる超局所フィルタリングについて述べる. この正規直交マルチウェーブレットは  $L^p(\mathbb{R}^n)$ ,  $1 < p < +\infty$  において, シャウダー基底となり,  $n$  次元シャノンのサンプリング定理と関係する. 超局所フィルタリングはフーリエ空間でコンパクト台を持つ滑らかな関数を表象とする擬微分作用素から構成される隙間のないフレームウェーブレットによっても行うことができる. 関数 ( 信号 ) をこれらの正規直交基底あるいは隙間のないフレームに関して展開することによって, 関数の持つ超局所成分を大まかに評価することができる. 前処理は  $n$  次元ヒルベルト変換を使って表現される. 数値計算例を考察する. **Keywords** : multiwavelet, microlocal analysis, filter, orthonormal basis, tight frame, Shannon sampling theorem, Hilbert transform

## 1 ウェーブレットとマルチウェーブレット

ヒルベルト空間  $L^2(\mathbb{R}^n)$  正規直交マルチウェーブレットは通常, 複数のスケーリング関数  $\varphi_\delta$ ,  $\delta \in D$  から構成される多重解像度解析の方法により生成される正規直交ウェーブレットであると定義される. この定義によれば, ウェーブレット関数の族はそれぞれのスケーリング関数  $\varphi_\delta$  に付随するグループ  $\{\psi_{\delta,\varepsilon}\}_{\varepsilon \in E}$ ,  $\text{card}(E) = 2^n - 1$  に分割される. それぞれのスケーリング関数  $\varphi_\delta$  の 2 のべきの伸張と整数だけの平行移動から作られる関数系

$$\{(\varphi_\delta)_{j,k}(x) := 2^{nj/2}(\varphi_\delta)(2^j x - k)\}_{j \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{Z}^n}$$

により生成される閉部分空間を  $V^{(\delta)}$  とおくと，直交直和分解

$$L^2(\mathbb{R}^n) = \bigoplus_{\delta \in D} V^{(\delta)}$$

が成り立つ．さらに，ウェーブレット関数の族  $\{\psi_{\delta,\varepsilon}\}_{\varepsilon \in E}$  の 2 のべきの伸張と整数だけの平行移動から作られる関数系

$$\{(\psi_{\delta,\varepsilon})_{j,k}(x) := 2^{nj/2}(\psi_{\delta,\varepsilon})(2^j x - k)\}_{\varepsilon \in E, j \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{Z}^n}$$

は閉部分空間  $V^{(\delta)}$  の正規直交基底となる．したがって，マルチウェーブレットは，ひとつのスケール関数から構成される多重解像度解析の方法により生成される正規直交ウェーブレットであるユニウェーブレットを，ベクトル値関数へ拡張したものであると考えられる．そこで添字  $(\delta, \varepsilon) \in D \times E$  を改めて  $\delta \in D$  とおき，ウェーブレットとマルチウェーブレットを次の定義 1 のように一般的に定義することは自然であろう．

記法 1 関数  $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$  に対して， $f_{jk}(x)$  を 2 のべきの伸張と整数だけの平行移動から作られる関数を

$$f_{jk}(x) = 2^{nj/2} f(2^j x - k), \quad j \in \mathbb{Z}, \quad k \in \mathbb{Z}^n$$

と表す．

定義 1 集合  $D$  を有限添字集合とする．関数系  $\{(\psi_\delta)_{jk}\}_{\delta \in D, j \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{Z}^n}$  が  $L^2(\mathbb{R}^n)$  の正規直交基底であるとき，関数系  $\{(\psi_\delta)_{jk}\}_{\delta \in D, j \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{Z}^n} \subset L^2(\mathbb{R}^n)$  を正規直交ウェーブレット基底と呼び，関数の族  $\{\psi_\delta\}_{\delta \in D}$  を正規直交ウェーブレット関数の族という．さらに， $D$  の要素の数が  $(2^n - 1)$  の倍数，つまり  $\text{card}(D) = (2^n - 1)d$ ， $d \in \mathbb{N}$  であるとき，関数系  $\{(\psi_\delta)_{jk}\}_{\delta \in D, j \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{Z}^n}$  を正規直交マルチウェーブレット基底と呼び，ベクトル値関数  $\Psi = [\psi_\delta]_{\delta \in D}$  を正規直交マルチウェーブレット関数という．

主結果のひとつである定理 3 を示すには，ウェーブレットを生成する関数の特徴づける次の定理 1 を使う．この定理 1 は本質的には Frazier, Garrigós, Wang and Weiss[1] の定理 1 である．

定理 1  $L \in \mathbb{N}$  であり， $\{\psi^1, \psi^2, \dots, \psi^L\} \subset L^2(\mathbb{R}^n)$  とする．このとき，任意の  $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$  に対して，

$$\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 = \sum_{\ell \in \{1, \dots, L\}, j \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{Z}^n} |(f, \psi_{j,k}^\ell)|^2$$

が成り立つ必要十分条件は，関数系  $\{\psi^1, \psi^2, \dots, \psi^L\}$  が

$$\sum_{\ell \in \{1, \dots, L\}, j \in \mathbb{Z}} |\widehat{\psi^\ell}(2^j \xi)|^2 = 1, \quad \text{a. a. } \xi \in \mathbb{R}^n,$$

$$t_q(\xi) = 0, \quad \text{a. a. } \xi \in \mathbb{R}^n, \quad \forall q \in \mathbb{Z}^n \setminus (2\mathbb{Z})^n$$

を満たすことである．ここに，

$$t_q(\xi) := \sum_{\ell \in \{1, \dots, L\}, j \in \mathbb{Z}_+} \widehat{\psi}^\ell(2^j \xi) \overline{\widehat{\psi}^\ell(2^j(\xi + 2\pi q))}, \quad \mathbb{Z}_+ := \mathbb{N} \cup \{0\}$$

である．

## 2 超局所解析

佐藤の超関数論 Sato[2] に基づくシュワルツの緩増加超関数に対する超局所解析 Kaneko[3] を使う．詳しくは Ashino, Heil, Nagase, and Vaillancourt[4] をみよ．

重要な点は次の2点である．

- 任意の点  $x \in \mathbb{R}^n$  に対し，その点で関数  $f(x)$  が解析接続できる方向を求める．
- 佐藤の超関数は，刃が実軸  $\mathbb{R}^n$  の開集合となるような楔形領域で正則な関数の一般化された境界値の和で定義される．

定義 2 佐藤の超関数  $f(x)$  は，無限小楔  $\Gamma_j 0$  で正則な関数  $F_j(z)$  の無限小楔の刃  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  への一般化された境界値  $F_j(x + i\Gamma_j 0) = \lim_{y \rightarrow 0, y \in \Gamma_j 0} F_j(x + iy)$  の和

$$f(x) = \sum_{j=1}^N F_j(x + i\Gamma_j 0)$$

である．

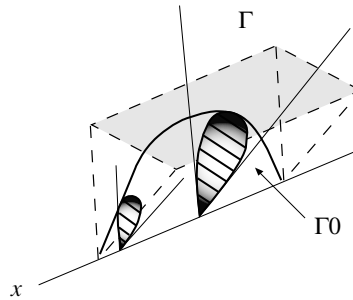


図 1: 無限小楔  $\Gamma_0$ .

### 3 超局所解析性

緩増加超関数  $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$  の超局所解析性をそのフーリエ像  $\hat{f}$  で特徴づけるには, 開錐  $\Gamma$  の双対錐  $\Gamma^\circ$  を使う.

定義 3 開錐  $\Gamma$  の双対錐  $\Gamma^\circ \stackrel{\text{def}}{\iff} \Gamma^\circ := \{\xi \in \mathbb{R}^n ; y \cdot \xi \geq 0, \forall y \in \Gamma\}$ .

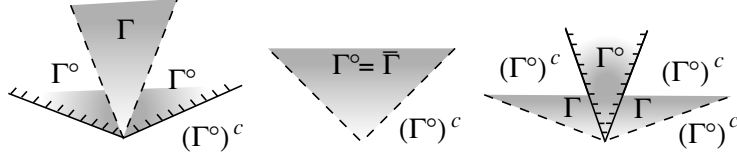


図 2: 開錐  $\Gamma$ , 双対錐  $\Gamma^\circ$ , 双対錐の補集合  $(\Gamma^\circ)^c$ .

補題 1  $\Gamma$  を開凸錐,  $f(x) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$  とする. このとき,

$f(x)$  が  $f(x + i\Gamma 0)$  と表せる  $\iff \hat{f}(\xi)$  が  $(\Gamma^\circ)^c$  で指数的減少.

### 4 超局所フィルタリング

定義 4  $D$ : 有限添字集合,  $\text{card}(D) = (2^n - 1)d$ ,  $d \in \mathbb{N}$  とする.

•  $\{(\psi_\delta)_{j,k}\}_{\delta \in D, j \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{Z}^n} \subset L^2(\mathbb{R}^n)$  がフレーム限界  $A$  を持つ隙間のないマルチウェーブレットフレームである, すなわち,  $\Psi = [\psi_\delta]_{\delta \in D}$  が隙間のないフレームを構成するマルチウェーブレット関数である

$$\stackrel{\text{def}}{\iff} f = \frac{1}{A} \sum_{\substack{\delta \in D \\ j \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{Z}^n}} \langle f, (\psi_\delta)_{j,k} \rangle (\psi_\delta)_{j,k}, \quad \forall f \in L^2(\mathbb{R}^n).$$

•  $\{(\psi_\delta)_{j,k}\}_{\delta \in D, j \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{Z}^n} \subset L^2(\mathbb{R}^n)$  が正規直交マルチウェーブレットである, すなわち,  $\Psi = [\psi_\delta]_{\delta \in D}$  が正規直交マルチウェーブレット関数である

$\stackrel{\text{def}}{\iff} \{(\psi_\delta)_{j,k}\}_{\delta \in D, j \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{Z}^n}$  が  $L^2(\mathbb{R}^n)$  の正規直交基底をなす.

補題 2  $\{(\psi_\delta)_{j,k}\}_{\delta \in D, j \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{Z}^n}$  が  $L^2(\mathbb{R}^n)$  の正規直交基底をなす

$\iff \{(\psi_\delta)_{j,k}\}_{\delta \in D, j \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{Z}^n}$  がフレーム限界 1 を持つ隙間のないマルチウェーブレットフレームであり, かつ

$$\|\psi_\delta\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = 1, \quad \delta \in D.$$

#### 問題

- 超局所解析的方向  $\xi \in \mathbb{S}^{n-1}$  に応じて, どのように正規直交マルチウェーブレット関数あるいは隙間のないフレームを構成するマルチウェーブレット関数  $\Psi = [\psi_\delta]_{\delta \in D}$  を構成すればよいか?

- 関数  $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$  に対し, そのウェーブレット係数  $\langle f, (\psi_\delta)_{j,k} \rangle$  から, 超局所成分に関する情報を得ることができるか?
- 正規直交マルチウェーブレットあるいは隙間のないマルチウェーブレットフレームによりフィルタリングは超局所成分を分離できるか?

## 結果

- 関数 (信号) の超局所成分に関する情報を得ることができる正規直交マルチウェーブレットと隙間のないマルチウェーブレットフレームを構成した.
- この超局所成分の分離は, 単なるフィルタリング, つまりフィルタ操作で行うことができるので, この方法を超局所フィルタリングと呼ぶ.
- 1次元の場合は, 古典的ハーディ空間  $H^2(\mathbb{R}_\pm)$  の正規直交ウェーブレット (マルチでない) と隙間のないウェーブレットフレーム (マルチでない) として知られていた.
- 1次元の正規直交マルチウェーブレットと隙間のないマルチウェーブレットフレームの  $n$ 次元への拡張を与えた.
- 関数  $f$  の超局所解析的方向をかなりよくとらえることができた.
- 超局所解析的方向  $\mathbb{S}^{n-1}$  に関してより良い解像度を得るには, より多くのマルチウェーブレット関数が必要であった.

## 1次元超局所フィルタリング

定理 2  $\psi_\pm$  を  $\hat{\psi}_\pm = \chi_{[\pm 2\pi, \pm 4\pi]}$  で定義する. このとき,  $\Psi := {}^t[\psi_+, \psi_-]$  はマルチウェーブレット関数である.

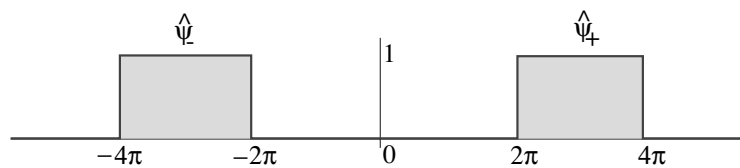


図 3:  $\psi_\pm$  のフーリエ像.

正射影  $\mathcal{P}_\pm$  を

$$\mathcal{P}_\pm f := \sum_{j,k \in \mathbb{Z}} \langle f, (\psi_\pm)_{j,k} \rangle (\psi_\pm)_{j,k}.$$

で定義する．このとき， $\mathcal{P}_\pm f(x)$  はそれぞれ上半平面  $\{\text{Im } z > 0\}$  と下半平面  $\{\text{Im } z < 0\}$  に解析接続できる．

注意 1 この正規直交基底は知られていた．古典的ハーディ空間  $H^2(\mathbb{R}_\pm)$  を

$$H^2(\mathbb{R}_\pm) = \{f \in L^2(\mathbb{R}) : \widehat{f}(\xi) = 0 \text{ a. a. } \xi \leq (\geq) 0\}$$

で定義する．このとき，

$$L^2(\mathbb{R}) = H^2(\mathbb{R}_+) \oplus H^2(\mathbb{R}_-).$$

であり， $\psi_\pm$  はそれぞれ  $H^2(\mathbb{R}_\pm)$  におけるユニウェーブレットとなる．

### $n$ 次元超局所フィルタリング

記法 2 •  $j \in \mathbb{Z}_+ := \mathbb{N} \cup \{0\}$ ，  $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \in E := \{0, 1\}^n \setminus \{0\}$ ，

$$\eta = (\eta_1, \dots, \eta_n) \in H := \{\pm 1\}^n.$$

- $Q_{\eta, \varepsilon, j, h} := \{\xi \in \mathbb{R}^n ; 2\pi(2^j \varepsilon_\ell + h_\ell - 1) \leq \eta_\ell \xi_\ell \leq 2\pi(2^j \varepsilon_\ell + h_\ell), \ell = 1, \dots, n\}$
- $Q_{\eta, \varepsilon, j} := \{Q_{\eta, \varepsilon, j, h} ; h_1, \dots, h_n \in \mathbb{N}, 1 \leq h_1, \dots, h_n \leq 2^j\}$
- $\mathbb{Z}_+^{E \times H} : E \times H$  から  $\mathbb{Z}_+$  への写像全体．

定理 3  $j \in \mathbb{Z}_+$ ，  $\varepsilon \in E$ ，  $\eta \in H$ ，  $Q \in Q_{\eta, \varepsilon, j}$  とする．立方体  $Q$  の特性関数を  $\chi_Q$  とし， $\psi_Q$  を

$$\widehat{\psi}_Q = \chi_Q$$

で定義する． $\rho \in \mathbb{Z}_+^{E \times H}$  に対し，

$$\mathcal{Q}_\rho := \bigcup_{(\eta, \varepsilon) \in E \times H} \mathcal{Q}_{\rho(\eta, \varepsilon), \eta, \varepsilon}$$

とおく．このとき， $\Psi := [\psi_Q]_{Q \in \mathcal{Q}_\rho}$  は正規直交ウェーブレット関数である．特に， $\rho$  が定数関数のとき， $\Psi$  は正規直交マルチウェーブレット関数である．

注意 2 • 芦野・萬代は定理 3 で構成した正規直交ウェーブレットが  $L^p(\mathbb{R}^n)$ ， $1 < p < +\infty$  の基底にもなることを示した．

- この  $L^p(\mathbb{R}^n)$  の基底になるという事実は， $\psi_Q$  が  $x$  空間での局所化があまり良くないため，一般論からは導けない．
- 証明の中で，シャノンのサンプリング定理の  $L^p$  版に当たることが重要な鍵となる．

Orthonormal multiwavelets are masks  
(characteristic functions of cubes  $Q$ )  
in Fourier space

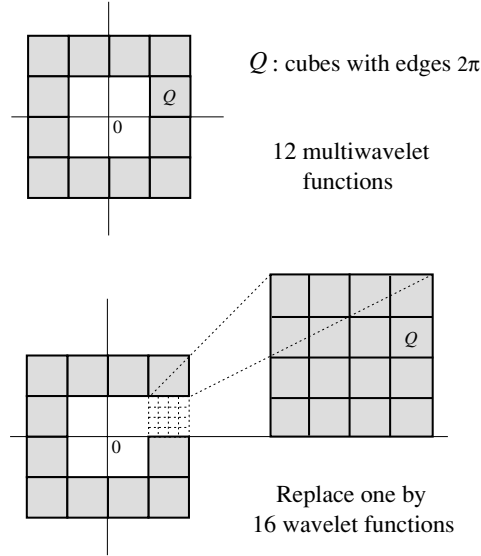


図 4: フーリエ空間でより良い解像度を得る技法 .

次に , 隙間のないマルチウェーブレットフレームの構成について述べる .  
 $\vartheta(t)$  を 1 変数の  $C_0^\infty(\mathbb{R})$  関数とし ,

$$\vartheta(t) \geq 0, \quad \vartheta(t) = \vartheta(-t),$$

$$\int_{\mathbb{R}} \vartheta(t) dt = 1, \quad \vartheta(t) = \begin{cases} 1, & |t| \leq \frac{1}{3}; \\ 0, & |t| \geq \frac{2}{3} \end{cases}$$

を満たすとする .  $\alpha > 0$  と  $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$  に対し ,

$$\vartheta_\alpha(\xi) = \frac{1}{\alpha^n} \prod_{j=1}^n \vartheta\left(\frac{\xi_j}{\alpha}\right)$$

とおく .  $j \in \mathbb{Z}_+, \varepsilon \in E, \eta \in H, 0 < \alpha < 1/2$  とする .  $Q \in \mathcal{Q}_{\eta, \varepsilon, j}$  に対し ,  
 $\lambda_Q(\xi)$  を

$$\lambda_Q(\xi) := \vartheta_\alpha * \chi_{\frac{1}{2}Q}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} \vartheta_\alpha(\xi - \zeta) \chi_{\frac{1}{2}Q}(\zeta) d\zeta$$

で定義する . 立方体  $\frac{1}{2}Q$  の特性関数を  $\chi_{\frac{1}{2}Q}$  とおく .

定理 4  $\rho \in \mathbb{Z}_+^{E \times H}$  に対し ,

$$\widetilde{\mathcal{Q}}_\rho := \bigcup_{(\eta, \varepsilon) \in E \times H} \frac{1}{2} \mathcal{Q}_{\rho(\eta, \varepsilon), \eta, \varepsilon},$$

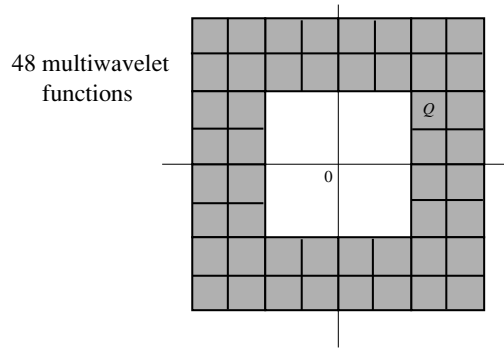
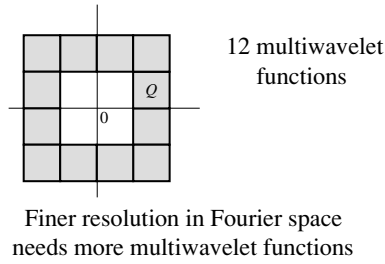


図 5: 2次元正規直交マルチウェーブレット関数のフーリエ像 .

$$\tau_\rho(\xi) := \sum_{j \in \mathbb{Z}, Q \in \tilde{\mathcal{Q}}_\rho} |\lambda_Q(2^j \xi)|^2$$

とおく .  $Q \in \tilde{\mathcal{Q}}_\rho$  に対し ,  $\psi_Q(x)$  を

$$\hat{\psi}_Q(\xi) := \tau_\rho(\xi)^{-1/2} \lambda_Q(\xi)$$

で定義する . このとき ,  $\Psi := [\psi_Q]_{Q \in \tilde{\mathcal{Q}}_\rho}$  は隙間のないフレームを構成するウェーブレット関数である . 特に ,  $\rho$  が定数関数のとき ,  $\Psi$  は隙間のないフレームを構成するマルチウェーブレット関数である .

## 5 超局所フィルタリングのアルゴリズム

関数  $f$  の離散マルチウェーブレット変換をコンピュータに実装するには , 解像度の高い , つまりスケール  $j$  の大きなスケーリング係数が必要となる . ユニウェーブレットの場合には , スケール  $j$  の大きなスケーリング関数がデルタ関数に近いとみなせるため , 関数  $f$  のサンプル値を ( 定数倍を調節して ) スケーリング係数として使うことができる . しかしながら , マルチウェーブレットの場合には ,  $d$  個のスケーリング関数の展開係数が必要となる . 単純にサンプル値をこれらのスケーリング関数の ( 定数倍を調節して ) 展開係数とすることは , 良い結果をもたらさない . 離散マルチウェーブレット変換を実行する前に , サンプルデータに適切な前処理を施して , 適当なスケーリン

グ関数の展開係数を前もって求めておく必要がある。

### 前フィルタ設計

定理 3 で構成した最も単純な 12 個のマルチウェーブレット関数や図 5 で述べた次に単純な 48 個のマルチウェーブレット関数などはすべて、4 個のスケール関数から生成されるので、これら 4 個のスケール関数から定理 3 で構成したすべてのマルチウェーブレット関数に対する前フィルタを次のように設計することができる。

定理 5 関数  $\varphi_\eta, \eta \in H$  を  $\hat{\varphi}_\eta = \chi_{2\pi Q_\eta}$  で定義する。このとき、 $\varphi_\eta, \eta \in H$  は 12 個のマルチウェーブレット関数のスケール関数である。十分大きな  $j_0$  に対して、前フィルタを

$$P_\eta = \mathcal{F}^{-1} \circ 2^{-nj_0} \chi_{2\pi 2^{j_0} Q_\eta} \circ \mathcal{F}, \quad \eta \in H$$

とおく。ここで、 $\mathcal{F}$  と  $\mathcal{F}^{-1}$  はそれぞれフーリエ変換と逆フーリエ変換を表し、 $2^{-nj_0} \chi_{2\pi 2^{j_0} Q_\eta}$  は関数  $2^{-nj_0} \chi_{2\pi 2^{j_0} Q_\eta}$  をかける掛け算作用素である。

注意 3 この前フィルタは  $n$  次元ヒルベルト変換を用いて表現することもできる。詳しくは Pandey and Singh[10] をみよ。

### 数値計算例

上で述べた超局所フィルタリングは、特に方向性を持った特異性の分離に有効である。その有効性を示す特異性の分離と雑音除去の数値計算例を挙げよう。以下の図は値が 0 から 1 までのグレースケールで表示されているが、0 は白に対応し、1 は黒に対応する。

図 5 に、高さが 1 で 45 度回転した“正方形片”（左）とそのフーリエ像（右）を示す。

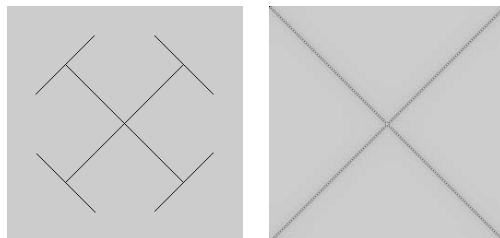


図 6: 正方形片の原画像（左）とそのフーリエ像（右）。

図 5 に、正方形片の原画像の中心に高さ 0.8 のガウス関数を加えた画像を左に示し、その左の画像の連続的に変化する部分であるガウス関数から特異

性である正方形片を分離するように超局所フィルタ処理をして得られた正方形片の画像を右に示す。

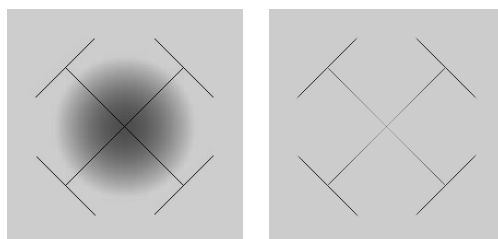


図 7: 原画像の中心にガウス関数を加えた画像(左)と超局所フィルタリングをした画像(右)。

図 5 に, 正方形片の原画像に 0 から 1 までのランダム雑音を付加した画像を左に示し, その左の画像からランダム雑音を除去できるように超局所フィルタ処理をして得られた正方形片の画像を右に示す。

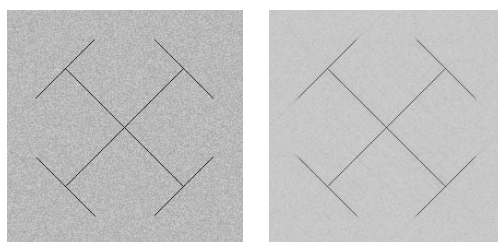


図 8: ランダム雑音を付加した画像(左)と超局所フィルタリングをした画像(右)。

## 参考文献

- [1] M Frazier, G. Garrigós, K. Wang and G. Weiss, *A characterization of functions that generate wavelet and related expansion*, The Journal of Fourier Analysis and Applications, 1997, Special Issue (1997) 883–906.
- [2] M. Sato, *Theory of hyperfunctions I* J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sec. I, **8**(1) (1959) 139–193.
- [3] A. Kaneko, *Linear partial differential equations with constant coefficients*, Iwanami, Tokyo, 1992. (Japanese)
- [4] R. Ashino, C. Heil, M. Nagase, and R. Vaillancourt, *Microlocal filtering with multiwavelets*, Computers & Mathematics with Applications, to appear.

- [5] I. Daubechies, A. Grossmann, and Y. Meyer, *Painless nonorthogonal expansions*, J. Math. Phys., **27**(5) (1986) 1271–1283.
- [6] E. Hernández and G. Weiss, *A first course on wavelets*, CRC Press, Boca Raton, FL, 1996, Chapter 7 and 8.
- [7] L. Hörmander, *The analysis of linear partial differential operators III*, Springer-Verlag, Berlin, 1985, Chapter 22.
- [8] S. Mallat, *A wavelet tool of signal processing*, Academic Press, San Diego, 1998, Sections 5.5 and 6.3.
- [9] L. Alvarez, P.-L. Lions, and J.-M. Morel, *Image selective smoothing and edge detection by nonlinear diffusion. II*, SIAM J. Numer. Anal., **26**(3), (June 1992), 845–866.
- [10] J. Pandey and O. Singh, *Characterization of functions with Fourier transform supported on orthants*, J. Math. Anal. Appl., **185**(2) (1994), 438–463.