

マルチウェーブレットによる超局所フィルタリングについて

Ryuichi ASHINO^{*}, Christopher HEIL[†], Michihiro NAGASE[‡],
Rémi VAILLANCOURT[§]

概要

ここに述べた結果は, Christopher HEIL, Michihiro NAGASE (長瀬 道弘), Rémi VAILLANCOURT による論文 *Microlocal filtering with multiwavelets*, Computers Math. Applic. (to appear) をもとに, ウェーブレットの簡単な解説を含め, 日本語でまとめたものである.

マルチウェーブレット (multiwavelet) はウェーブレット正規直交基底のひとつの一般化である. ここでは, マルチウェーブレットと超局所解析 (microlocal analysis) について簡単に述べた後, 複数のスケーリング関数から構成される正規直交マルチウェーブレットによる超局所フィルタリング (microlocal filtering) について述べる. 前処理は n 次元ヒルベルト変換を使って表現される. この超局所フィルタリングでは, 大ざっぱな超局所解析が単なるフィルタ操作によって可能となり, ひとつのマルチウェーブレットはひとつの大ざっぱな超局所解析の方向に対応する. 数値計算例を考察する.

Keywords : wavelet, multiwavelet, microlocal analysis, filter, orthonormal basis, Hilbert transform

1 ウェーブレットとマルチウェーブレット

次の記号法を使う.

記法 1 関数 $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ に対して, $f_{jk}(x)$ を 2 のべきの伸張と整数だけの平行移動から作られる関数

$$f_{jk}(x) = 2^{nj/2} f(2^j x - k), \quad j \in \mathbb{Z}, \quad k \in \mathbb{Z}^n$$

とする.

このとき, $\|f_{jk}\| = \|f\|$ が成り立つことを注意しておく. n 次元ウェーブレットとは, 添字集合 $E := \{0, 1\}^n \setminus \{(0, \dots, 0)\}$ を持つ $2^n - 1$ 個の関数から作られる $L^2(\mathbb{R}^n)$ の正規直交基底であり, 次のように定義される.

定義 1 関数 $\psi_\varepsilon \in L^2(\mathbb{R}^n)$, $\varepsilon \in E$ に対し, $\{(\psi_\varepsilon)_{jk}\}_{\varepsilon \in E, j \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{Z}^n}$ が $L^2(\mathbb{R}^n)$ の正規直交基底となるとき, ψ_ε , $\varepsilon \in E$ をウェーブレット関数 (wavelet function), または単にウェーブレットという.

応用上, ウェーブレット ψ_ε には次のような条件を課することが多い.

条件 1 (i) 局所性 (localization):

$$\forall \ell \in \mathbb{N}, \exists C_\ell; |\psi_\varepsilon(x)| \leq C_\ell (1 + |x|)^{-\ell}.$$

(ii) パニシングモーメント (vanishing moment):

$$\exists L \in \mathbb{Z}_+ := \mathbb{N} \cup \{0\}, 0 \leq \forall |\alpha| \leq L, \alpha \in \mathbb{Z}_+^n; \int_{\mathbb{R}^n} x^\alpha \psi(x) dx = 0.$$

(iii) 正則性 (regularity):

$$\exists r \in \mathbb{Z}_+; \psi_\varepsilon \in C^r(\mathbb{R}^n).$$

^{*}Division of Mathematical Sciences, Osaka Kyoiku University, Kashiwara, Osaka 582-8582, Japan, E-mail: ashino@cc.osaka-kyoiku.ac.jp

[†]School of Mathematics, Georgia Institute of Technology, Atlanta, Georgia 30332 USA, E-mail: heil@math.gatech.edu

[‡]Department of Mathematics, Graduate School of Science, Osaka University, Toyonaka, Osaka 560-0043, Japan, E-mail: nagase@math.wani.osaka-u.ac.jp

[§]Department of Mathematics and Statistics, University of Ottawa, Ottawa, Ontario, Canada K1N 6N5, E-mail: remi@uottawa.ca

ウェーブレットは多重解像度解析の方法と呼ばれる方法によって構成でき、1次元ウェーブレットを生成する1次元多重解像度解析の n 個のテンソル積は n 次元多重解像度解析となり、 n 次元ウェーブレットを生成することができる。このような n 次元ウェーブレットは分離可能 (separable) と呼ばれ、本質的には多次元ウェーブレットとは言えない。多次元ウェーブレットは1次元ウェーブレットに比べ難しく、多くの研究は1次元ウェーブレットのみを扱っている。以後、本節では1次元ウェーブレットの場合について説明する。1次元ウェーブレット関数を添字を省略し単に ψ と表す。

ウェーブレット関数 ψ が、 r 次の正則性 (iii) を持ち、 ψ の r 次までの導関数が局所性 (i) を持つなら、 ψ が r 次までのすべてのパニシングモーメント (ii) ($L = r$) を持つことが知られている。たとえば、[1] 定理 7.2.1 をみよ。ウェーブレット正規直交基底のうち、最も有名なものは Daubechies のウェーブレット [11] であろう。Daubechies のウェーブレットは実数値のコンパクト台を持つ正規直交基底であり、任意の自然数 $N \geq 2$ に対し、適当にウェーブレット関数 $N\psi$ を構成すれば、サポート幅は $2N - 1$ であり、 $r(N)$ 次のヘルダー連続性と $N - 1$ 次までのパニシングモーメントを持つようにできる。この $r(N)$ は、十分大きな N に対し、

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} N^{-1}r(N) = 1 - (\log 3)/(2 \log 2) \simeq 0.2075$$

であることが知られている。Daubechies のウェーブレットは、数値計算を用いた応用には非常に有用であったが、対称性を持たなかった。画像処理などの一部の分野では、この対称性が重要な意味を持つ。非対称性は位相のずれを生み、位相のずれは画像に含まれる輪郭部分に不自然さをもたらすからである。そこで、次の問題が考えられた。

- ある程度のヘルダー連続性とパニシングモーメントを持ち、実数値でコンパクト台を持つ対称なウェーブレット正規直交基底を構成することができるか。

この問題は否定的に解決された。たとえば、[11], Theorem 8.1.4 をみよ。その後、上の問題の条件のどれかあきらめて、ウェーブレットを構成する研究がなされた。複素数値を許した Lawton のウェーブレット [19] や正規直交基底をあきらめた双直交 (biorthogonal) ウェーブレット [11] などである。これ以前に構成されていたウェーブレットでは、不連続性を許した Haar のウェーブレット、コンパクト台でない場合には Meyer のウェーブレット [21] などがある。

このような流れとは別に、[6] のように、ウェーブレット正規直交基底をひとつのウェーブレット関数から生成するのではなく、複数のウェーブレット関数、つまり、ベクトル値のウェーブレット関数を使って、2のべきの伸張と整数だけの平行移動からだけで生成される正規直交基底を構成したとすればどのようなメリットを持つかが考えられた。

定義 2 $d \in \mathbb{N}$ に対し、 $D := \{1, \dots, d\}$ とかく。ベクトル値関数 $\Psi := {}^t(\psi_1, \dots, \psi_d) = [\psi_\delta]_{\delta \in D} \in L^2(\mathbb{R})^d$ がマルチウェーブレット関数 (multiwavelet function) であるとは、

$$\left\{ (\psi_\delta)_{jk}(x) := 2^{j/2} \psi_\delta(2^j x - k) \right\}_{\delta \in D, j \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{Z}}$$

が $L^2(\mathbb{R})$ の正規直交基底になるときをいう。それぞれの $(\psi_\delta)_{jk}$ ($\delta \in D, j, k \in \mathbb{Z}$) をマルチウェーブレット (multiwavelet) と呼ぶ。特に区別する必要があるときは、通常のウェーブレット ($d = 1$ の場合) を、ユニウェーブレット (uniwavelet) と呼ぶ。このとき、 $f \in L^2(\mathbb{R})$ の正規直交基底 $\{(\psi_\delta)_{jk}\}_{\delta \in D, j, k \in \mathbb{Z}}$ に関する展開

$$f = \sum_{\delta \in D, j, k \in \mathbb{Z}} \langle f, (\psi_\delta)_{jk} \rangle (\psi_\delta)_{jk} \quad (1)$$

をマルチウェーブレット展開 (multiwavelet expansion) と呼ぶ。

$d = 2$ のとき, Geronimo, Hardin and Massopust[14] で構成されたマルチスケーリング関数と Donavan, Geronimo, Hardin and Massopust[13] で構成されたマルチウェーブレット関数は, フラクタル補間関数の方法を用いて構成し, 連続で対称性を持ち, 0 次と 1 次のパニシングモーメントを持つコンパクト台の正規直交基底を生成する. これにより,

- ある程度のヘルダー連続性とパニシングモーメントを持ち, 実数値でコンパクト台を持つ対称なマルチウェーブレット正規直交基底を構成することができるか.

という問題の肯定的解決が考えられており, ウェーブレット関数の個数 d を増やせば, より高いヘルダー連続性が得られる例がいくつか知られているが, Daubechies のウェーブレットのように, 任意の N に対する系列を構成したわけではなく, 未だ十分に解決されていない.

Alpert[6] は Haar 基底を一般化し, ウェーブレット関数の個数 d を増やすことにより, 任意有限のパニシングモーメントを持つ不連続なマルチウェーブレット関数を構成した. また, Strang and Strela[25] は $d = 2$ のとき, 区分的に直線であるマルチスケーリング関数とマルチウェーブレット関数を構成した. マルチスケーリング関数からマルチウェーブレット関数を構成する一般論としては, Jia and Shen[18], 芦野と亀谷 [8] などがある.

ヒルベルト空間 $L^2(\mathbb{R}^n)$ の正規直交マルチウェーブレットは上述の定義 2 のように複数のスケーリング関数 $\varphi_\delta, \delta \in D$ から構成される多重解像度解析の方法により生成される正規直交ウェーブレットであると定義される. この定義によれば, ウェーブレット関数の族はそれぞれのスケーリング関数 φ_δ に付随するグループ $\{\psi_{\delta,\varepsilon}\}_{\varepsilon \in E}, E = \{0, 1\}^n \setminus \{(0, \dots, 0)\}$ に分割される. それぞれのスケーリング関数 φ_δ の 2 のべきの伸張と整数だけの平行移動から作られる関数系

$$\{(\varphi_\delta)_{j,k}(x) := 2^{nj/2}(\varphi_\delta)(2^j x - k)\}_{j \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{Z}^n}$$

により生成される閉部分空間を $V^{(\delta)}$ とおくと, 直交直和分解

$$L^2(\mathbb{R}^n) = \bigoplus_{\delta \in D} V^{(\delta)}$$

が成り立つ. さらに, ウェーブレット関数の族 $\{\psi_{\delta,\varepsilon}\}_{\varepsilon \in E}$ の 2 のべきの伸張と整数だけの平行移動から作られる関数系

$$\{(\psi_{\delta,\varepsilon})_{j,k}(x) := 2^{nj/2}(\psi_{\delta,\varepsilon})(2^j x - k)\}_{\varepsilon \in E, j \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{Z}^n}$$

は閉部分空間 $V^{(\delta)}$ の正規直交基底となる. したがって, マルチウェーブレットは, ひとつのスケーリング関数から構成される多重解像度解析の方法により生成される正規直交ウェーブレットであるユニウェーブレットを, ベクトル値関数へ拡張したものであると考えられる. そこで添字 $(\delta, \varepsilon) \in D \times E$ を改めて $\delta \in D$ とおき, 必ずしもスケーリング関数から構成されない場合を含め, ウェーブレットとマルチウェーブレットを次の定義 3 のように一般的に定義することは自然であろう.

定義 3 集合 D を有限添字集合とする. 関数系 $\{(\psi_\delta)_{jk}\}_{\delta \in D, j \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{Z}^n}$ が $L^2(\mathbb{R}^n)$ の正規直交基底であるとき, 関数系 $\{(\psi_\delta)_{jk}\}_{\delta \in D, j \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{Z}^n} \subset L^2(\mathbb{R}^n)$ を正規直交ウェーブレット基底 (orthonormal wavelet basis) と呼び, 関数の族 $\{\psi_\delta\}_{\delta \in D}$ を正規直交ウェーブレット関数の族 (a family of orthonormal wavelet functions) という. さらに, D の要素の数が $(2^n - 1)$ の倍数, つまり $\text{card}(D) = (2^n - 1)d, d \in \mathbb{N}$ であるとき, 関数系 $\{(\psi_\delta)_{jk}\}_{\delta \in D, j \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{Z}^n}$ を正規直交マルチウェーブレット基底 (orthonormal multiwavelet basis) と呼び, ベクトル値関数 $\Psi = [\psi_\delta]_{\delta \in D}$ を正規直交マルチウェーブレット関数 (orthonormal multiwavelet function) という.

主結果のひとつである定理 3 を示すには, ウェーブレットを生成する関数の特徴づける次の定理 1 を使う. この定理 1 は本質的には Frazier, Garrigós, Wang and Weiss[15] の定理 1 である.

定理 1 $L \in \mathbb{N}$ であり, $\{\psi^1, \psi^2, \dots, \psi^L\} \subset L^2(\mathbb{R}^n)$ とする. このとき, 任意の $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ に対して,

$$\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 = \sum_{\ell \in \{1, \dots, L\}, j \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{Z}^n} |\langle f, \psi_{j,k}^\ell \rangle|^2$$

が成り立つ必要十分条件は, 関数系 $\{\psi^1, \psi^2, \dots, \psi^L\}$ が

$$\sum_{\ell \in \{1, \dots, L\}, j \in \mathbb{Z}} |\widehat{\psi}^\ell(2^j \xi)|^2 = 1, \quad \text{a. a. } \xi \in \mathbb{R}^n,$$

$$t_q(\xi) = 0, \quad \text{a. a. } \xi \in \mathbb{R}^n, \quad \forall q \in \mathbb{Z}^n \setminus (2\mathbb{Z})^n$$

を満たすことである. ここに,

$$t_q(\xi) := \sum_{\ell \in \{1, \dots, L\}, j \in \mathbb{Z}_+} \widehat{\psi}^\ell(2^j \xi) \overline{\widehat{\psi}^\ell(2^j(\xi + 2\pi q))}, \quad \mathbb{Z}_+ := \mathbb{N} \cup \{0\}$$

である.

2 超局所解析

佐藤の超関数論 Sato[24] に基づくシュワルツの緩増加超関数に対する超局所解析を使う(金子 [4]). 詳しくは Ashino, Heil, Nagase, and Vaillancourt[10] をみよ.

重要な点は次の 2 点である.

- 任意の点 $x \in \mathbb{R}^n$ に対し, その点で関数 $f(x)$ が解析接続できる方向を求める.
- 佐藤の超関数は, 刃が実軸 \mathbb{R}^n の開集合となるような楔形領域で正則な関数の一般化された境界値の和で定義される.

定義 4 佐藤の超関数 $f(x)$ は, 無限小楔 $\Gamma_j 0$ で正則な関数 $F_j(z)$ の無限小楔の刃 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ への一般化された境界値 $F_j(x + i\Gamma_j 0) = \lim_{y \rightarrow 0, y \in \Gamma_j 0} F_j(x + iy)$ の和

$$f(x) = \sum_{j=1}^N F_j(x + i\Gamma_j 0)$$

である.

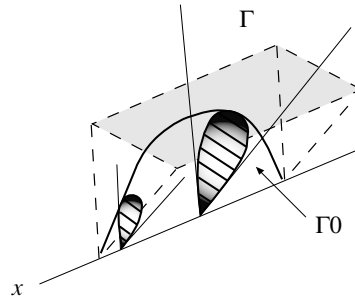


図 1: 無限小楔 Γ_0 .

3 超局所解析性

緩増加超関数 $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ の超局所解析性をそのフーリエ像 \hat{f} で特徴づけるには、開錐 Γ の双対錐 Γ° を使う。

定義 5 原点に頂点を持つ開錐 Γ に対して、 Γ の双対錐 Γ° を $\Gamma^\circ := \{\xi \in \mathbb{R}^n ; y \cdot \xi \geq 0, \forall y \in \Gamma\}$ で定義する。

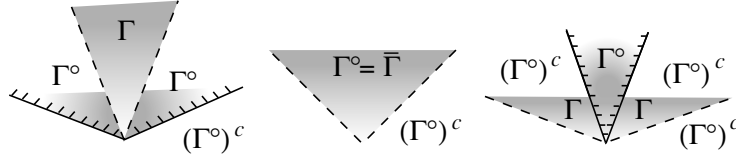


図 2: 開錐 Γ , 双対錐 Γ° , 双対錐の補集合 $(\Gamma^\circ)^c$.

補題 1 Γ を開凸錐, $f(x) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ とする. このとき, $f(x)$ が $f(x + i\Gamma 0)$ と表せるための必要十分条件は, $f(x)$ のフーリエ像 $\hat{f}(\xi)$ が $(\Gamma^\circ)^c$ で指数的に減少することである.

4 超局所フィルタリング

問題:

- 超局所解析的方向 $\xi \in \mathbb{S}^{n-1}$ に応じて, どのように正規直交マルチウェーブレット関数 $\Psi = [\psi_\delta]_{\delta \in D}$ を構成すればよいか?
- 関数 $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ に対し, そのウェーブレット係数 $\langle f, (\psi_\delta)_{j,k} \rangle$ から, 超局所成分に関する情報を得ることができるか?
- 正規直交マルチウェーブレットによりフィルタリングは超局所成分を分離できるか?

結果:

- 関数 (信号) の超局所成分に関する情報を得ることができる正規直交マルチウェーブレットを構成した.
- この超局所成分の分離は, 単なるフィルタリング, フィルタ操作で行うことができるので, この方法を超局所フィルタリングと呼ぶ.
- 1次元の場合は, 古典的ハーディ空間 $H^2(\mathbb{R}_\pm)$ の正規直交ウェーブレット (マルチでない) として知られていた.
- 1次元の正規直交マルチウェーブレットの n 次元への拡張を与えた.
- 関数 f の超局所解析的方向をかなりよくとらえることができた.
- 超局所解析的方向 \mathbb{S}^{n-1} に関してより良い解像度を得るには, より多くのマルチウェーブレット関数が必要であった.

1 次元超局所フィルタリング

定理 2 ψ_{\pm} を $\widehat{\psi}_{\pm} = \chi_{[\pm 2\pi, \pm 4\pi]}$ で定義する．このとき, $\Psi := {}^t[\psi_+, \psi_-]$ はマルチウェーブレット関数である．

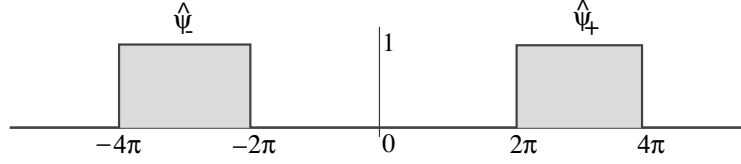


図 3: ψ_{\pm} のフーリエ像．

正射影 \mathcal{P}_{\pm} を

$$\mathcal{P}_{\pm} f := \sum_{j,k \in \mathbb{Z}} \langle f, (\psi_{\pm})_{j,k} \rangle (\psi_{\pm})_{j,k}.$$

で定義する．このとき, $\mathcal{P}_{\pm} f(x)$ はそれぞれ上半平面 $\{\text{Im } z > 0\}$ と下半平面 $\{\text{Im } z < 0\}$ に解析接続できる．

注意 1 この正規直交基底は知られていた．古典的ハーディ空間 (classical Hardy space) $H^2(\mathbb{R}_{\pm})$ を

$$H^2(\mathbb{R}_{\pm}) = \{f \in L^2(\mathbb{R}) : \widehat{f}(\xi) = 0 \text{ a. a. } \xi \leq (\geq) 0\}$$

で定義する．このとき,

$$L^2(\mathbb{R}) = H^2(\mathbb{R}_+) \oplus H^2(\mathbb{R}_-).$$

であり, ψ_{\pm} はそれぞれ $H^2(\mathbb{R}_{\pm})$ におけるユニウェーブレットとなる．

n 次元超局所フィルタリング

記法 2 $\bullet j \in \mathbb{Z}_+ := \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \in E := \{0, 1\}^n \setminus \{(0, \dots, 0)\}$,

$$\eta = (\eta_1, \dots, \eta_n) \in H := \{\pm 1\}^n.$$

- $\bullet Q_{\eta, \varepsilon, j, h} := \{\xi \in \mathbb{R}^n ; 2\pi(2^j \varepsilon_{\ell} + h_{\ell} - 1) \leq \eta_{\ell} \xi_{\ell} \leq 2\pi(2^j \varepsilon_{\ell} + h_{\ell}), \ell = 1, \dots, n\}$
- $\bullet Q_{\eta, \varepsilon, j} := \{Q_{\eta, \varepsilon, j, h} ; h_1, \dots, h_n \in \mathbb{N}, 1 \leq h_1, \dots, h_n \leq 2^j\}$
- $\bullet \mathbb{Z}_+^{E \times H} : E \times H$ から \mathbb{Z}_+ への写像全体．

定理 3 $j \in \mathbb{Z}_+$, $\varepsilon \in E$, $\eta \in H$, $Q \in Q_{\eta, \varepsilon, j}$ とする．立方体 Q の特性関数を χ_Q とし, ψ_Q を

$$\widehat{\psi}_Q = \chi_Q$$

で定義する． $\rho \in \mathbb{Z}_+^{E \times H}$ に対し,

$$\mathcal{Q}_{\rho} := \bigcup_{(\eta, \varepsilon) \in E \times H} \mathcal{Q}_{\rho(\eta, \varepsilon), \eta, \varepsilon}$$

とおく．このとき, $\Psi := [\psi_Q]_{Q \in \mathcal{Q}_{\rho}}$ は正規直交ウェーブレット関数である．特に, ρ が定数関数のとき, Ψ は正規直交マルチウェーブレット関数である．

証明の概略: 定理 1 で $\{\psi^1, \psi^2, \dots, \psi^L\} = \{\psi_Q\}_{Q \in \mathcal{Q}_{\rho}}$ とおき, $\Psi := [\psi_Q]_{Q \in \mathcal{Q}_{\rho}}$ とかく．定理 1 の必要十分条件である 2 つの等式を示すことができるから, 任意の $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ に対して,

$$\|f\|^2 = \sum_{(Q, j, k) \in \mathcal{Q}_{\rho} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^n} |(f, (\psi_Q)_{j,k})|^2$$

Orthonormal multiwavelets are masks
(characteristic functions of cubes Q)
in Fourier space

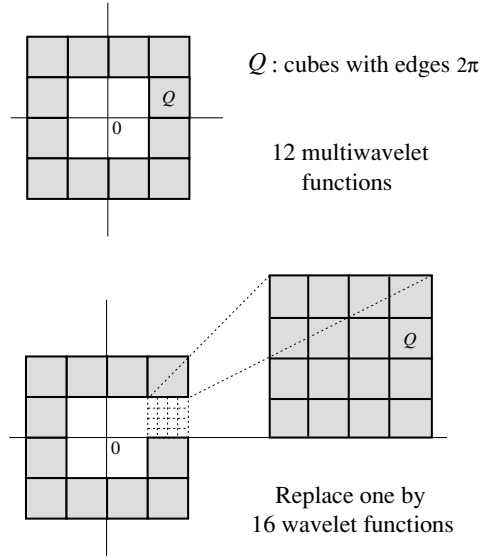


図 4: フーリエ空間でより良い解像度を得る技法 .

が成り立つ . 関数 f を $\psi_{\tilde{Q}}$, $\tilde{Q} \in \mathcal{Q}_\rho$ で置き換えると ,

$$\|\psi_{\tilde{Q}}\|^2 = \sum_{(Q,j,k) \in \mathcal{Q}_\rho \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^n} |\langle \psi_{\tilde{Q}}, (\psi_Q)_{j,k} \rangle|^2$$

を得る .

$$\|(\psi_Q)_{j,k}\|^2 = 1, \quad (Q,j,k) \in \mathcal{Q}_\rho \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^n$$

が成り立つことに注意すると ,

$$\|\psi_{\tilde{Q}}\|^2 (1 - \|\psi_{\tilde{Q}}\|^2) = \sum_{(Q,j,k) \neq (\tilde{Q},0,0)} |(\psi_{\tilde{Q}}, (\psi_Q)_{j,k})|^2 = 0$$

を得る . \square

5 超局所フィルタリングのアルゴリズム

関数 f の離散マルチウェーブレット変換をコンピュータに実装するには , 解像度の高い , つまりスケール j の大きなスケーリング係数が必要となる . ユニウェーブレットの場合には , スケール j の大きなスケーリング関数がデルタ関数に近いとみなせるため , 関数 f のサンプル値を (定数倍を調節して) スケーリング係数として使うことができる . しかしながら , マルチウェーブレットの場合には , d 個のスケーリング関数の展開係数が必要となる . 単純にサンプル値をこれらのスケーリング関数の (定数倍を調節して) 展開係数とすることは , 良い結果をもたらさない . 離散マルチウェーブレット変換を実行する前に , サンプルデータに適切な前処理 (pre-processing) を施して , 適当なスケーリング関数の展開係数を前もって求めておく必要がある .

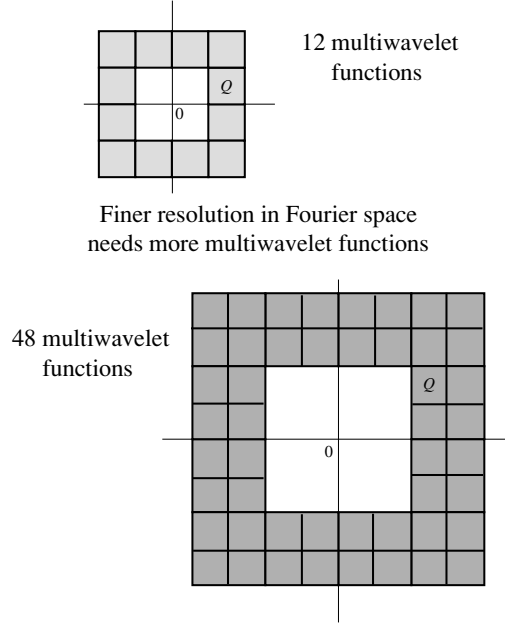


図 5: 2次元正規直交マルチウェーブレット関数のフーリエ像。

前フィルタ設計

定理 3 で構成した最も単純な 12 個のマルチウェーブレット関数や図 5 で述べた次に単純な 48 個のマルチウェーブレット関数などはすべて、いずれも 4 個のスケール関数から生成されるので、これら 4 個のスケール関数から定理 3 で構成したすべてのマルチウェーブレット関数に対する前フィルタ (pre-filter) を次のように設計することができる。

定理 4 関数 $\varphi_\eta, \eta \in H$ を $\hat{\varphi}_\eta = \chi_{2\pi Q_\eta}$ で定義する。このとき、 $\varphi_\eta, \eta \in H$ は 12 個のマルチウェーブレット関数のスケール関数である。十分大きな j_0 に対して、前フィルタを

$$P_\eta = \mathcal{F}^{-1} \circ 2^{-nj_0} \chi_{2\pi 2^{j_0} Q_\eta} \circ \mathcal{F}, \quad \eta \in H$$

とおく。ここで、 \mathcal{F} と \mathcal{F}^{-1} はそれぞれフーリエ変換と逆フーリエ変換を表し、 $2^{-nj_0} \chi_{2\pi 2^{j_0} Q_\eta}$ は関数 $2^{-nj_0} \chi_{2\pi 2^{j_0} Q_\eta}$ をかける掛け算作用素である。

注意 2 この前フィルタは n 次元ヒルベルト変換を用いて表現することもできる。詳しくは Pandey and Singh[22] をみよ。

擬微分作用素としての表現

画像 $f(x, y)$ とフーリエ空間におけるマスク (mask) $p(\xi, \eta) = \chi_Q(\xi, \eta)$ が与えられたとする。マスク p の画像 f への作用は、擬微分作用素 (pseudodifferential operator)

$$\begin{aligned} Pf(x, y) &= \frac{1}{4\pi^2} \int_{\mathbb{R}^2} e^{i(x\xi + y\eta)} p(\xi, \eta) \hat{f}(\xi, \eta) d\xi d\eta \\ &= \frac{1}{4\pi^2} \int_Q e^{i(x\xi + y\eta)} \hat{f}(\xi, \eta) d\xi d\eta. \end{aligned}$$

として表現できる。微分作用素 $P : f \mapsto Pf$ は局所作用素 (local operator) :

$$\text{supp } Pf \subset \text{supp } f,$$

つまり P の f への作用により f の台を広げない作用素である．同様に，擬微分作用素は擬局所作用素 (pseudolocal operator) :

$$\text{sing supp } Pf \subset \text{sing supp } f,$$

つまり P の f への作用により f の特異台 (singular support) を広げない作用素である．たとえば，ミク口楕円型作用素 (micro-elliptic operator) [17] や準楕円型作用素 (hypoelliptic operator) である非線型熱作用素 (nonlinear heat operator) は画像の雑音除去に使われる [20], [7] .

6 数値計算例

例 1 :

上で述べた超局所フィルタリングは，特に方向性を持った特異性の分離に有効である．その有効性を示す特異性の分離と雑音除去の数値計算例を挙げよう．以下の図は値が 0 から 1 までのグレースケールで表示されているが，0 は白に対応し，1 は黒に対応する．

図 6 に，高さが 1 で 45 度回転した“正方形片” (左) とそのフーリエ像 (右) を示す．

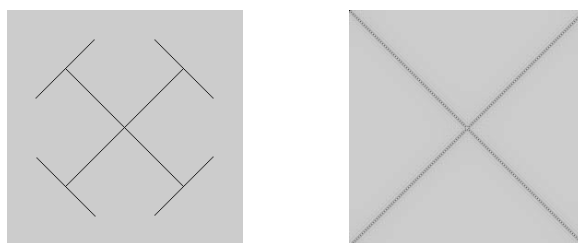


図 6: 正方形片の原画像 (左) とそのフーリエ像 (右) .

図 6 に，正方形片の原画像の中心に高さ 0.8 のガウス関数を加えた画像を左に示し，その左の画像の連続的に変化する部分であるガウス関数から特異性である正方形片を分離するように超局所フィルタ処理をして得られた正方形片の画像を右に示す．

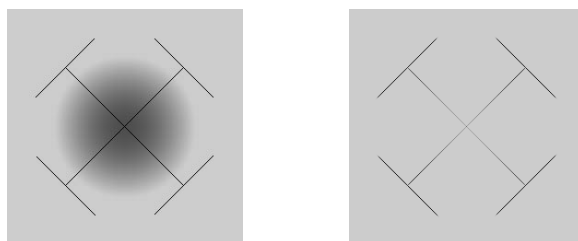


図 7: 原画像の中心にガウス関数を加えた画像 (左) と超局所フィルタリングをした画像 (右) .

図 6 に，正方形片の原画像に 0 から 1 までのランダム雑音を付加した画像を左に示し，その左の画像からランダム雑音を除去できるように超局所フィルタ処理をして得られた正方形片の画像を右に示す．

通常扱う多くの画像のフーリエ像では，エネルギーの大きい，つまり離散フーリエ変換の係数の絶対値の大きいくつもの極大値の近くに画像の連続的に変化する部分が含まれる．我々の提案する最も単純な 12 個の超局所フィルタリングでは，画像のフーリエ像の絶対値の大きいくつもの極大値のフーリエ空間での粗っぽい方向を求めていることになる．もちろん必要ならば更に細かく方向を限定することができる．このフーリエ空間でのエネルギーが大きくなる方向は，元の空間ではその方向とは直交する方向に特異性があることを示唆する．このようにして，方向性を持った特異性の分離が可能となる．

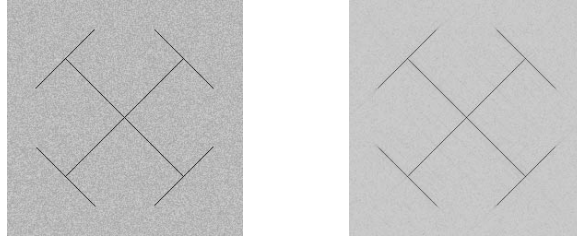


図 8: ランダム雑音を付加した画像 (左) と超局所フィルタリングをした画像 (右) .

例 2 :

画像処理で標準的なテストに使われる “Barbara” の画像を処理してみよう . この画像を前処理した結果を図 9 の左側に示す . この 4 つの画像はそれぞれ , フーリエ空間における 4 つの象限 $(+, +)$, $(-, +)$, $(-, -)$, $(+, -)$ に台を持つ前フィルタによって得られた画像である . それぞれの位置はフーリエ空間における 4 つの象限の位置に対応している . この例では , 4 つの前フィルタリング $P_{(\pm, \pm)}$ によって得られた画像の中で , 最もエネルギーが大きいのは前フィルタリング $P_{(+, -)}$ によって得られた画像である . このことは , 画像が最も明るいことから容易にわかるが , 次の 4 つの画像のエネルギーの結果からもわかる .

```
Energy of 4 prefiltered images = 1.0e+06 *
                2.2059      2.0735
                2.5749      8.5187
```

通常扱う多くの画像では , 特異性が含まれる部分は非常に少ないためエネルギーが小さく , 連続的に変化する部分は画像のほとんどを占めるためエネルギーが大きいことが経験的に知られている . したがって , 本例においても前フィルタリング $P_{(+, -)}$ によって得られた画像が連続的に変化する部分を多く含み , その他の前フィルタリングによって得られた画像には連続的に変化する部分はあまり含まれず , ほとんど特異性からなるであろうと推測できる . しかしながら , 前フィルタリング $P_{(+, -)}$ によって得られた画像だけでは近似としては十分とはいえない . そこで , 前フィルタリング $P_{(+, -)}$ によって得られた画像にその他の前フィルタリングによって得られた画像を加えて近似画像を作ってみよう . 具体的には , $P_{(+, -)} + P_{(-, -)}$, $P_{(+, -)} + P_{(-, +)}$, $P_{(+, -)} + P_{(+, +)}$ のフィルタリングによって得られた画像を図 9 の右側に示す . 時計回りに , 右上には原画像 , 右下には $P_{(+, -)} + P_{(-, -)}$ のフィルタリングによって得られた画像 , 左下には $P_{(+, -)} + P_{(-, +)}$ のフィルタリングによって得られた画像 , 左上には $P_{(+, -)} + P_{(+, +)}$ のフィルタリングによって得られた画像をそれぞれ配置した .

佐藤の超関数論からわかることは , 画像の超局所解析の方向が反対方向を含めば強い特異性を持ち得るし , 反対方向を含まなければある方向に解析接続できることになるため特異性が限定される . このことは , 図 9 の右側の 4 つの画像で , 左上の画像が右下と右下の画像に比べてより強い特異性を持つことに現れているといえよう .

さらに , 最も単純な 12 個の超局所フィルタリングを図 10 に示す . 中央には原画像のフーリエ像を示す .

参考文献

- [1] 芦野 隆一・山本 鎮男 , 『ウェーブレット解析 – 誕生・発展・応用 –』 , 共立出版 , 1997.
- [2] 芦野 隆一・萬代 武史・浅川 秀一 共訳 , 『ウェーブレットの基礎』 , 科学技術出版社 , 2000. (Translation from *A First Course on Wavelets*, CRC).
- [3] 今井 功 , 『応用超関数論 (I・II)』 , サイエンス社 , 1981.



図 9: 左: 4 つの前フィルタリング $P_{(\pm, \pm)}$ によって得られた画像 (左) と 4 つの前フィルタリングによって得られた画像を 2 つ加えて得られる近似画像 (右) .

- [4] 金子 晃, 『定数係数線型偏微分方程式』, 岩波講座 基礎数学, 岩波書店, 1976.
- [5] 金子 晃, 『超関数入門 (上・下)』, 東京大学出版会, 1980.
- [6] B. Alpert, *A class of bases in L^2 for the sparse representation of integral Operators*, SIAM J. Math. Anal. **26** (1993), 246–262.
- [7] L. Alvarez, P.-L. Lions, and J.-M. Morel, *Image selective smoothing and edge detection by nonlinear diffusion. II*, SIAM J. Numer. Anal., **26**(3), (June 1992), 845–866.
- [8] R. Ashino and M. Kametani, *A lemma on matrices and the construction of multi-wavelets*, Math. Japon. **45** (1997), 267–287.
- [9] R. Ashino, M. Nagase, and R. Vaillancourt, *A construction of multiwavelets*, Computers Math. Applic. **32** (1996), 23–37.
- [10] R. Ashino, C. Heil, M. Nagase, and R. Vaillancourt, *Microlocal filtering with multiwavelets*, Computers Math. Applic., to appear.
- [11] I. Daubechies, *Ten Lectures on Wavelets*, CBMS-NSF Regional Conference Series in Applied Mathematics **61** (1992), SIAM.
- [12] I. Daubechies, A. Grossmann, and Y. Meyer, *Painless nonorthogonal expansions*, J. Math. Phys., **27**(5) (1986) 1271–1283.
- [13] G. Donovan, J. Geronimo, D. Hardin, and P. R. Massopust, *Construction of orthogonal wavelet using fractal interpolation functions*, SIAM J. Math. Anal. **27** (1996), 1158–1192.
- [14] J. Geronimo, D. Hardin, and P. R. Massopust, *Fractal functions and wavelet expansions based on several scaling functions*, J. Approx. Theory **78** (1994), 373–401.
- [15] M Frazier, G. Garrigós, K. Wang and G. Weiss, *A characterization of functions that generate wavelet and related expansion*, The Journal of Fourier Analysis and Applications, 1997, Special Issue (1997) 883–906.

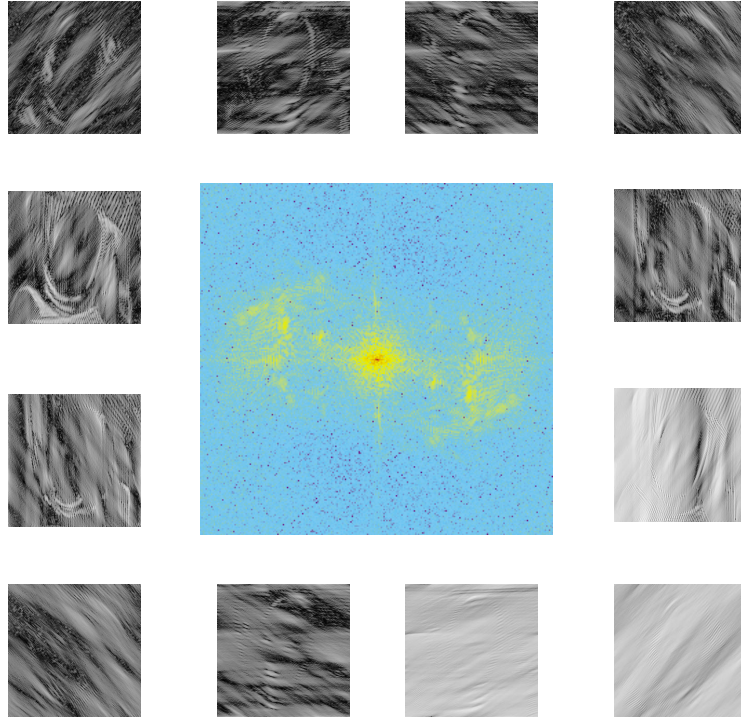


図 10: 12 個の超局所フィルタリングによって得られる画像と原画像のフーリエ像 (中央) .

- [16] E. Hernández and G. Weiss, *A first course on wavelets*, CRC Press, Boca Raton, FL, 1996, Chapter 7 and 8.
- [17] L. Hörmander, *The analysis of linear partial differential operators III*, Springer-Verlag, Berlin, 1985, Chapter 22.
- [18] JR.-Q. Jia and Z. Shen, *Multiresolution and wavelets*, Proc. Edinburgh Math. Soc. **37** (1994), 271–300.
- [19] W. Lawton, *Applications of complex valued wavelet transforms to subband decomposition*, IEEE Trans. on Signal Processing **41** (1993), 3566–3568.
- [20] S. Mallat, *A wavelet tool of signal processing*, Academic Press, San Diego, 1998, Sections 5.5 and 6.3.
- [21] Y. Meyer, *Wavelets and operators*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics **37** (1992), Cambridge.
- [22] J. Pandey and O. Singh, *Characterization of functions with Fourier transform supported on or-thants*, J. Math. Anal. Appl., **185**(2) (1994), 438–463.
- [23] G. Plonka, *Factorization of refinement masks of function vectors*, Approximation Theory VIII, ed. by C. K. Chui and L. L. Schumaker (1995), World Scientific Publishing Co.
- [24] M. Sato, *Theory of hyperfunctions I* J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sec. I, **8**(1) (1959) 139–193.
- [25] G. Strang and V. Strela, *Short wavelets and matrix dilation equations*, IEEE Trans. on Signal Processing **45** (1995), 108–115.