

隙間のないウェーブレットフレームによる 超局所フィルタリング

芦野 隆一 (大阪教育大学 数理科学)

この研究は Christopher HEIL^{*}, 長瀬 道弘[†], Rémi VAILLANCOURT[‡] との共同研究である。

はじめに

ウェーブレット解析は時間周波数解析のひとつであり, 時間領域と周波数領域で局所的な解析を行う“局所フーリエ解析”と呼べるものである. 同じような局所フーリエ解析が超関数論や偏微分方程式論においても超局所解析の名の下に行われてきたが, 数値計算を用いて超局所解析を行うことはほとんど試みられていなかった. そこで, ウェーブレット解析がフィルタリングと呼ばれる数値計算を用いて行われることに注目し,

R. Ashino, C. Heil, M. Nagase, and R. Vaillancourt, *Microlocal filtering with multiwavelets*, Computers Math. Applic., vol. 41 (2001), no. 1-2, 111–133

においてフィルタリングにより超局所解析ができる $L^2(\mathbb{R}^n)$ の正規直交ウェーブレット基底を構成したが, そのウェーブレット関数のフーリエ変換はコンパクト台を持つが不連続であったため, x 空間での局在性が良くなかった.

この論文の数値計算例を図 1 に示す. 図 1 の左図は 2 次元のガウス関数に直線を加え

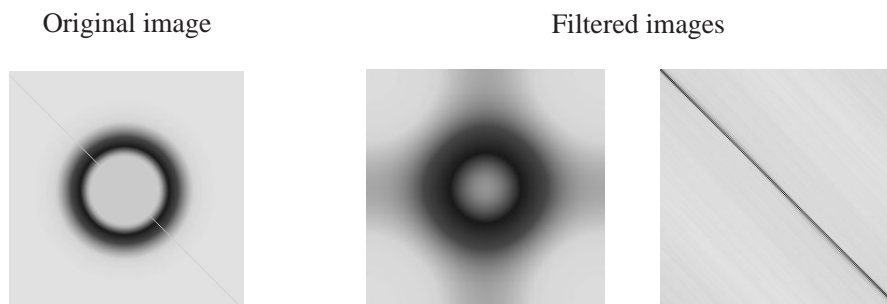


図 1: 超局所解析ができる正規直交ウェーブレット基底によるフィルタリングの例

て得られた画像である. 多くの自然な画像は, 小さな部分に注目してみると, このように

^{*}School of Mathematics, Georgia Institute of Technology

[†]大阪大学大学院理学研究科

[‡]Mathematics and Statistics, University of Ottawa

ほとんど連続的に変化する部分に、いくつかの直線的な特異性（不連続性）が付け加わっているとみなせることが知られている．2次元のガウス関数は自然な画像の小さな部分の連続的な部分のモデルであり、直線は特異性のモデルである．このような方向性を持った特異性は、フーリエ空間ではこの方向と直交する方向に現れるから、超局所解析的手法によって分離できると期待できる．実際、我々の超局所フィルタリングを適用して分離した画像が図1の右の2つの画像である．

この論文で得られた正規直交ウェーブレット基底は1次元である $L^2(\mathbb{R})$ の場合には、古典的ハーディ空間 $H^2(\mathbb{R}_+)$ （フーリエ変換が負の実軸で0となる $L^2(\mathbb{R})$ 関数からなる空間）における正規直交ウェーブレット基底を構成する問題に関係する．ここで $H^2(\mathbb{R}_+)$ の正規直交ウェーブレット基底とは、ある関数 $\psi \in H^2(\mathbb{R}_+)$ があって、

$$\psi_{j,k}(x) = 2^{\frac{j}{2}} \psi(2^j x - k), \quad j, k \in \mathbb{Z}$$

と書くとき、 $H^2(\mathbb{R}_+)$ の正規直交基底になるような関数系 $\{\psi_{j,k}\}_{j,k \in \mathbb{Z}}$ のことである．このとき、関数 $\psi \in H^2(\mathbb{R}_+)$ を正規直交ウェーブレットと呼ぶ．しかし、

P. Auscher, *Il n'existe pas de bases d'ondelettes régulières dans l'espace de Hardy H^2* , C. R. Acad. Sci. Paris, 315, Série I (1992), 769-772

により $H^2(\mathbb{R}_+)$ の正規直交ウェーブレットでそのフーリエ変換が適当な滑らかさを持つものは存在しないことが示されていた．すなわち、ウェーブレット関数 $\psi \in H^2(\mathbb{R}_+)$ が、 $|\widehat{\psi}|$ が \mathbb{R} 上連続であり、ある $\alpha > 0$ があって無限遠で $|\widehat{\psi}(\xi)| = O((1 + |\xi|)^{-\alpha - \frac{1}{2}})$ という条件を満たすような正規直交ウェーブレットは存在しないことが知られている．つまり、 $L^2(\mathbb{R}^n)$ の場合の我々の結果は、 $n = 1$ のとき、ウェーブレット関数のフーリエ変換がコンパクト台を持つという枠組みではある意味で最良であることになる．

本稿では、既に構成した超局所解析ができる $L^2(\mathbb{R}^n)$ の正規直交ウェーブレット基底をフーリエ空間でうまく滑らかにすることによって、超局所解析ができる隙間のないウェーブレットフレームを構成できることを報告し、フレーム多重解像度解析との関連について述べる．

フレーム

x 空間における良い局在性を得るためにはウェーブレットに要請する条件を弱める必要がある．そのひとつとして、非調和フーリエ級数の研究

R.J. Duffin, A.C. Shaffer, *A class of nonharmonic Fourier Series*, Trans. Amer. Math. Soc., 72, (1952), 341-366

において提唱されたフレームという枠組みが正規直交基底に代わる枠組みとして、工学的にも重要であることが知られていた．たとえば、

I. Daubechies, A. Grossman, Y. Meyer, *Painless nonorthogonal expansions*, J. Math. Phys., 27(5), (1986), 1271-1283.

一般に可分なヒルベルト空間 \mathbb{H} の元の系 $\{\phi_j\}_{j \in J}$ がフレームであるとは、定数 A と B ($0 < A \leq B < \infty$) があって、

$$A\|f\|^2 \leq \sum_{j \in J} |\langle f, \phi_j \rangle|^2 \leq B\|f\|^2, \quad \forall f \in \mathbb{H}$$

を満たすときをいう。定数 A と B をフレーム限界という。フレームは基底である必要はないし、フレームの元は正規化されている必要もない。また、 $A = B$ が成り立つとき、フレームは隙間のないフレームであるという。系 $\{\phi_j\}_{j \in J}$ がフレームのときは、その双対フレーム $\{\tilde{\phi}_j\}_{j \in J}$ を使って、

$$f = \sum_{j \in J} \langle f, \phi_j \rangle \tilde{\phi}_j, \quad \forall f \in \mathbb{H}$$

により係数 $\{\langle f, \phi_j \rangle : j \in J\}$ から f を再構成できる。特に、フレームが隙間のないフレームのときには、 $\tilde{\phi}_j = \frac{1}{A} \phi_j$ となり、

$$f = \frac{1}{A} \sum_{j \in J} \langle f, \phi_j \rangle \phi_j, \quad \forall f \in \mathbb{H}$$

が成り立つ。このとき、 $\phi_j = \frac{1}{\sqrt{A}} \phi_j$ と置き換えることにより、 $A = 1$ としてよいことを注意しておく。

ウェーブレット変換からフレームへ

フレームは連続ウェーブレット変換を離散化するときに見える自然な概念である。関数 ψ が

$$\psi(x), x\psi(x) \in L^2(\mathbb{R}), \quad \widehat{\psi}(\xi), \xi\widehat{\psi}(\xi) \in L^2(\mathbb{R}),$$

$$C_\psi := \int_0^{+\infty} \frac{|\widehat{\psi}(\xi)|^2}{\xi} d\xi = \int_0^{+\infty} \frac{|\widehat{\psi}(-\xi)|^2}{\xi} d\xi < +\infty$$

を満たすとき、 ψ はアナライジングウェーブレットであるといい、アナライジングウェーブレット ψ に関する $f(x) \in L^2(\mathbb{R})$ の(連続)ウェーブレット変換を

$$(W_\psi f)(b, a) := \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{\mathbb{R}} f(x) \overline{\psi\left(\frac{x-b}{a}\right)} dx, \quad a > 0, \quad b \in \mathbb{R}$$

で定義する。この逆変換が存在すること、すなわち

$$f(x) = \frac{1}{C_\psi} \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} W_\psi f(b, a) \frac{1}{\sqrt{a}} \psi\left(\frac{x-b}{a}\right) db \frac{da}{a^2}$$

が成り立つこと、およびある意味でエネルギー $\|f\|_{L^2(\mathbb{R})}^2$ を分解する等式

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 dx = \frac{1}{C_\psi} \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} |W_\psi f(b, a)|^2 db \frac{da}{a^2}$$

が成り立つことは

Grossmann and Morlet, *Decomposition of Hardy functions into square integrable wavelets of constant shape*, SIAM J. Math. Anal., **15** (1984), 723–736

によって示された．これらの等式は与えられた関数（信号）をウェーブレット変換によって時間周波数解析する根拠となる．

$$\psi_{b,a}(x) := \frac{1}{\sqrt{a}} \psi\left(\frac{x-b}{a}\right)$$

とおき，ウェーブレット変換と逆ウェーブレット変換を内積を使って表現すると，

$$Wf_\psi(b, a) = \langle f, \psi_{b,a} \rangle,$$

$$f(x) = \frac{1}{C_\psi} \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} \langle f, \psi_{b,a} \rangle \psi_{b,a}(x) db \frac{da}{a^2}$$

となる．したがって，時間周波数解析を数値計算により行うために逆ウェーブレット変換を離散化すると，すなわち， b, a を離散化すると，積分は和になるから，ある関数 $\tilde{\psi}$ があって，

$$f(x) = \sum_{j,k} \langle f, \psi_{b_k, a_j} \rangle \tilde{\psi}_{b_k, a_j}(x)$$

と書けないかと考えるのは自然であろう．この式はまさにフレームとその双対フレームによる再生公式そのものである．Daubechies はフレームとなるための十分条件を

I. Daubechies, *The wavelet transform, time-frequency localization and signal analysis*, IEEE Trans. Info. Theory, **36**(5) (1990), 961–1005

で与えた．すなわち，

$$\beta(\xi) := \sup_{1 \leq |\omega| \leq a} \sum_{j=-\infty}^{+\infty} |\hat{\psi}(a^j \omega)| |\hat{\psi}(a^j \omega + \xi)|,$$

$$\Delta := \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{+\infty} \left[\beta\left(\frac{2\pi n}{u_0}\right) \beta\left(\frac{-2\pi n}{u_0}\right) \right]^{1/2}$$

とおくとき， u_0 と a が

$$A_0 = \frac{1}{u_0} \left(\inf_{1 \leq |\omega| \leq a} \sum_{j=-\infty}^{+\infty} |\hat{\psi}(a^j \omega)|^2 - \Delta \right) > 0,$$

$$B_0 = \frac{1}{u_0} \left(\sup_{1 \leq |\omega| \leq a} \sum_{j=-\infty}^{+\infty} |\hat{\psi}(a^j \omega)|^2 + \Delta \right) < +\infty$$

を満たせば

$$\left\{ \psi_{j,k}(x) := \frac{1}{\sqrt{a^j}} \psi\left(\frac{x - k u_0 a^j}{a^j}\right) \right\}_{j,k \in \mathbb{Z}}$$

は A_0, B_0 をフレーム限界とする $L^2(\mathbb{R})$ のフレームとなることを示した．

隙間のないウェーブレットフレームを構成するための条件

関数 $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ に対して, $f_{jk}(x)$ を

$$f_{jk}(x) = 2^{nj/2} f(2^j x - k), \quad j \in \mathbb{Z}, \quad k \in \mathbb{Z}^n$$

で定義する. このとき, $\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \|f_{jk}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$ が成り立つ.

M. Frazier, G. Garrigós, K. Wang and G. Weiss, *A characterization of functions that generate wavelet and related expansion*, The Journal of Fourier Analysis and Applications, Special Issue (1997) 883–906

によって与えられた次の結果を使って超局所解析ができる隙間のないウェーブレットフレームを構成する. すなわち, 任意の $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ に対して等式

$$\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 = \sum_{\ell \in \mathbb{L}, j \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{Z}^n} |\langle f, \psi_{j,k}^\ell \rangle|^2$$

が成り立つための関数系 $\{\psi^1, \psi^2, \dots, \psi^L\} \subset L^2(\mathbb{R}^n)$ に対する必要十分条件は, 次の 2 つの式:

$$\begin{aligned} \sum_{\ell \in \mathbb{L}, j \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{Z}^n} \left| \widehat{\psi}^\ell(2^j \xi) \right|^2 &= 1, \quad \text{a.e. } \xi \in \mathbb{R}^n, \\ t_q(\xi) &= 0, \quad \text{a.e. } \xi \in \mathbb{R}^n, \quad \forall q \in \mathbb{Z}^n \setminus (2\mathbb{Z})^n \end{aligned}$$

が成り立つことである. ここで,

$$t_q(\xi) := \sum_{\ell \in \mathbb{L}, j \in \mathbb{Z}_+} \widehat{\psi}^\ell(2^j \xi) \overline{\widehat{\psi}^\ell(2^j(\xi + 2\pi q))}, \quad \mathbb{Z}_+ := \mathbb{N} \cup \{0\}$$

であり, $q \in \mathbb{Z}^n \setminus (2\mathbb{Z})^n$ は少なくとも 1 つの成分 q_j が奇数であることを意味する.

超局所のできる隙間のないウェーブレットフレーム

まず, 記号法について述べる.

- \mathbb{R}^n における n 次元象限のパラメータ付けを $H = \{\pm 1\}^n$ で行う. たとえば \mathbb{R}^2 の場合は, $(+1, +1)$, $(-1, +1)$, $(-1, -1)$, $(+1, -1)$ はそれぞれ第 1 象限, 第 2 象限, 第 3 象限, 第 4 象限に対応する.
- $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_n) \in H$ に対して, 単位立方体 $\prod_{k=1}^n [0, \eta_k]$ を Q_η で表す. ただし, $[0, -1]$ は $[-1, 0]$ を意味するものとする.
- $E = \{0, 1\}^n \setminus \{(0, \dots, 0)\}$ は n 次元単位立方体の原点を除いた $2^n - 1$ 個の頂点の集合を表す.
- $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \in E$ と $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_n) \in H$ に対して, 成分ごとの積を

$$\varepsilon * \eta := (\varepsilon_1 \eta_1, \dots, \varepsilon_n \eta_n)$$

で表す.

- $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \in E$, $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_n) \in H$, $j \in \mathbb{Z}_+$ に対して, 立方体

$$2^j(Q_\eta + \varepsilon * \eta) := \{(2^j(x_1 + \varepsilon_1 \eta_1), \dots, 2^j(x_n + \varepsilon_n \eta_n)); (x_1, \dots, x_n) \in Q_\eta\}$$

を定義し, $\mathcal{Q}_{j,\varepsilon,\eta}$ を $2^j(Q_\eta + \varepsilon * \eta)$ を測度 0 の集合を除いて $2^j(Q_\eta + \varepsilon * \eta)$ を被覆する重なりを持たない単位立方体の族とする. すなわち,

$$\mathcal{Q}_{j,\varepsilon,\eta} := \left\{ \prod_{k=1}^n [\eta_k(\ell_k - 1), \eta_k \ell_k] + 2^j(\varepsilon * \eta); 1 \leq \ell_1, \dots, \ell_n \leq 2^j, \ell_1, \dots, \ell_n \in \mathbb{N} \right\}$$

とする. ただし, $[-(\ell_k - 1), -\ell_k]$ は $[-\ell_k, -(\ell_k - 1)]$ を意味するものとする. また,

$$\pi \mathcal{Q}_{j,\varepsilon,\eta} := \{\pi Q; Q \in \mathcal{Q}_{j,\varepsilon,\eta}\}$$

とおく.

- K を添字集合とする \mathbb{R}^n の部分集合の族 $\{Q_k\}_{k \in K}$ に対して,

$$\mathcal{Q} := \{Q_k\}_{k \in K}, \quad \iota(\mathcal{Q}) := \bigcup_{k \in K} Q_k$$

と定義する.

- 集合 $E \times H$ から集合 \mathbb{Z}_+ への写像全体のなす集合を $\mathbb{Z}_+^{E \times H}$ と表す.
- 非負の整数 $N \in \mathbb{Z}_+$ に対して, $\mathbb{Z}_N := \{0, 1, \dots, N\}$ とおき, 集合 $E \times H$ から集合 \mathbb{Z}_N への写像全体のなす集合を $\mathbb{Z}_N^{E \times H}$ と表す.

次の条件を満たす関数 $\vartheta(t) \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ をとる.

$$\vartheta(t) \geq 0, \quad \vartheta(t) = \vartheta(-t), \quad \int_{-\infty}^{\infty} \vartheta(t) dt = 1, \quad \vartheta(t) = \begin{cases} 1, & |t| \leq \frac{1}{3}, \\ 0, & |t| \geq \frac{2}{3}. \end{cases}$$

正数 $\alpha > 0$ と $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$ に対して,

$$\vartheta_\alpha(\xi) = \frac{1}{\alpha^n} \prod_{j=1}^n \vartheta\left(\frac{\xi_j}{\alpha}\right)$$

とおく. このとき, 次の定理が成り立つ.

定理 1 正数 α を $0 < \alpha < 1/2$ を満たすようにとる. $j \in \mathbb{Z}_+$, $\varepsilon \in E$, $\eta \in H$ とし, $Q \in \mathcal{Q}_{j,\varepsilon,\eta}$ に対して, $\lambda_Q(\xi)$ を

$$\lambda_Q(\xi) := \vartheta_{\pi\alpha} * \chi_{\pi Q}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} \vartheta_{\pi\alpha}(\xi - \zeta) \chi_{\pi Q}(\zeta) d\zeta$$

で定義する. ここで $\chi_{\pi Q}$ は立方体 πQ の特性関数である. $\rho \in \mathbb{Z}_+^{E \times H}$ に対して,

$$\widetilde{\mathcal{Q}}_\rho := \bigcup_{(\varepsilon,\eta) \in E \times H} \pi \mathcal{Q}_{\rho(\varepsilon,\eta),\varepsilon,\eta}, \quad \tau_\rho(\xi) := \sum_{Q \in \widetilde{\mathcal{Q}}_\rho, j \in \mathbb{Z}} |\lambda_Q(2^j \xi)|^2$$

とおき, $Q \in \widetilde{\mathcal{Q}}_\rho$ に対して, $\psi_Q(x)$ を $\widehat{\psi}_Q(\xi) := \tau_\rho(\xi)^{-1/2} \lambda_Q(\xi)$ で定義する. このとき, $\Psi := \{\psi_Q\}_{Q \in \widetilde{\mathcal{Q}}_\rho}$ は隙間のないウェーブレットフレームを生成するウェーブレット関数である.

数値計算例

図 2 の左図のように画像 Barbara の左上に Hanning 窓関数から作った正弦関数のような 1 周期分の上下に振動する波からなる直線的なキズを付けた．このキズは方向性を持った特異性であると考えることができる．我々の目的はこの特異性の検出・分離である．我々のフィルタリングを適用することにより，図 2 の右図ような結果を得た．右図では 1 周期分の上下動が読みとれる．

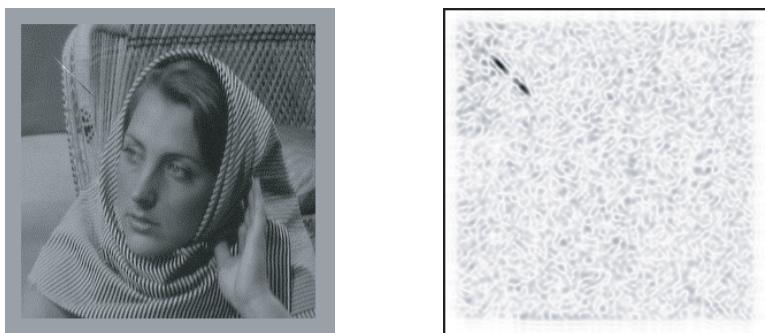


図 2: 直線的なキズを持つ Barbara (左) と直線的なキズの検出・分離 (右)