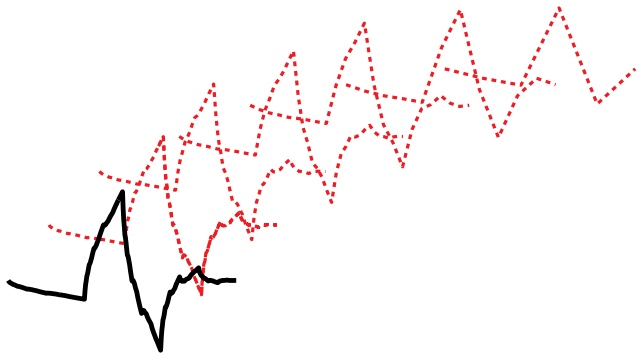
ウェーブレット解析入門

芦野隆一



ウェーブレット解析を理解する上で助けとなる予備知識を短くまとめておこう．これらは拙著 [1] と [2] をもとにまとめたものであり，一部は

▷ Welcome to Ashino's Home Page!
`http://www.osaka-kyoiku.ac.jp/~ashino/`

で見ることができる．

目　次

1 節　ウェーブレットの歴史

2 節　フーリエ窓変換

3 節　フーリエ解析の不確定性原理

4 節　連続ウェーブレット変換

5 節　ウェーブレット展開

6 節　メイエのウェーブレット

A 節　MATLAB ウェーブレットツールボックス

B 節　ウェーブレットインターネットリソース

C 節　ウェーブレットの教科書について

参考文献

1　ウェーブレットの歴史

ウェーブレットの歴史については [21] が数学的予備知識を必要とせず読み物として非常に面白い．また，[24] や [22] などは実際に理論を造ってきた人たちが歴史について述べているので重みがある．これらの本をもとに歴史を振り返ってみよう．

現在のウェーブレット理論の歴史は非常に浅く，80 年代初めに現れたにすぎない．しかし，理論的アイデアにしても実際の応用にしても大部分はウェーブレットが数学における新しい道具として現れるずっと以前から知られていたことなのである．たとえば，メイエ（Meyer）は [24] の中で，1930 年代の数学におけるウェーブレットのルーツ（Lévy and Brownian motion, Littlewood-Paley theory, Franklin system, wavelets of Lusin）あるいはそれ以降の atomic decompositions また Strömberg's wavelets について述べている．また，信号理論におけるルーツとして Gabor や Ville の時間周波数解析における仕事や画像処理におけるルーツとして Burt と Adelson によるピラミッドアルゴリズムなど，多くのルーツを述べている．それではなぜウェーブレットがこれほど熱狂的に研究されているのであろうか．[21] によれば，1986 年に 23 歳のコンピュータ映像専攻の大学院生だったマラー（Mallat）が数学者のメイエに，メイエたちがやってることも電子工学のエンジニアがやってることも画像処理の人たちがやってることも，みんな同じことを違う名のもとにやっているのだということを説明したのが発端で，マラーとメイエは多重解像度解析の枠組みを作り上げたということであるから，それまでは他の分野の人たちが自分と同じことをしているとは誰も考えていなかったのである．

> Mallat: Multiresolution approximations and wavelet orthonormal bases of $L^2(\mathbf{R})$, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **315** (1989), 69–87.

気がついてみると，科学の多くの分野で同じような研究がされていて，これらを統一して説明する理論としてウェーブレット理論は造られてきたというのがひとつの大きな理由であろう．この統一して説明しようという動きは大きなうねりとなって非常に多くの分野で共同研究が行われ，それぞれの分野の科学的理解に深い影響を与えて今日に至っている．

現在のウェーブレット理論は 1980 年代初頭にモルレー（Morlet）が考えた “wavelets of constant shape” を使った新しい時間周波数解析に始まるとされている．時間周波数解析とはフーリエ解析のように三角関数の波の重ね合わせで関数（信号）を表現するのではなく，短い波 “wavelets” の重ね合わせで関数（信号）を表現するというものである．これはちょうど楽譜を思い浮かべてもらえばよい．ある周波数の音がある時間に演奏されて，その重ね合わせが音楽になっている．音楽を楽譜で表すことが時間周波数解析であると思えばよい．モルレー以前に “wavelets” という言葉は使われていたのでモルレーは “wavelets of constant shape” という言葉を使ったことを注意しておく．時間周波数解析には不確定性原理という大きな制限があって，時間と周波数の両方の情報を同時に詳しく知ることはできないことが証明されている．1946 年にガボール（Gabor）は短時間フーリエ変換という時間周波数解析を導入した．[Gabor: Theory of communication, *Journ. IEE*, **93** (1946), 429–457]．ガボールは不確定性原理という制限の中では理論的に最良のガウシアンとよばれる関数を使うことを提案したので，ガウシアンを使う短時間フーリエ変換を特にガボール変換とよび，多くのエンジニアが使っている．モルレーは 1975 年ごろガボール変換を使って石油探査を行うフランスの石油会社 Elf-Aquitaine のエンジニアであった．石油探査の標準的方法は地中に振動や衝撃を与えてその反射波を解析するというもので，反射波は直接反射してくる波や何度か反射を繰り返してくる波が入り

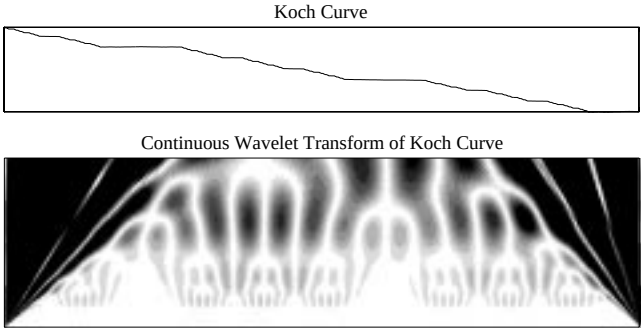


Figure 1: コッホ曲線の連続ウェーブレット変換像

交じっていて地層が数百もあるので解析は困難をきわめていた．新しい強力なコンピュータを導入し，ガボール変換による詳しい時間周波数解析をしてもなんら新しい結果を生み出さなかった．そこでモルレーは全く新しい発想のもとに，ひとつの波を拡大縮小して時間周波数解析の短い波“wavelets”に使ったのである．モルレーはこの波を“wavelets of constant shape”とよんだ．ウェーブレット変換の誕生である．短時間フーリエ変換は波の続く時間は変えずに振動数を変えるというものであるので短い波“wavelets”の形は変わることを考えれば，全く逆の発想であるといえよう．しかし，同僚には信じてもらえず，1981 年にエコールポリテクニックのクラスメートであった物理学者のバリアン（Balian）に相談し，マルセイユの理論物理学者のグロスマン（Grossmann）を紹介され，マルセイユのグループ（この中には後にウェーブレット理論で大きな仕事をするドベシィ（Daubechies）も含まれていたのだが）は数値実験的には非常に効果があったモルレーのウェーブレット変換の理論的基礎を構築することになったのである．

> Grossmann and Morlet: Decomposition of Hardy functions into square integrable wavelets of constant shape, *SIAM J. Math. Anal.*, **15** (1984), 723–736.

Figure 1 はモルレーのウェーブレットを使ってコッホ曲線（Koch Curve）とよばれる曲線を MATLAB により連続ウェーブレット変換した例である．コッホ曲線の自己相似性が連続ウェーブレット変換により強調されてはっきり読みとれる．

ウェーブレット解析が数学の分野に入ってきたのは [22] によれば 1985 年のことで，メイエが同僚の物理学者ラスクー（Lascoux）にグロスマンとモルレーによるウェーブレット変換を紹介されたことに始まるようである．メイエはウェーブレット変換が数学ではすでに知られていたカルデロン（Calderón）の単位の分解とよばれている公式と深い関係があることを見抜いたのだが，この公式が時間周波数解析に応用できるということは考えてもみないことだったのである．深い感銘を受けたメイエはすぐにグロスマンに会うためにマルセイユ行きの列車に乗り，共同研究することになったのである．ウェーブレット変換は 1 変数関数が 2 変数関数に変換されるので，解析する信号の情報を過剰に含んでいる．もちろん，この情報の繰り返しによってデータが解析しやすくなったり，パターン

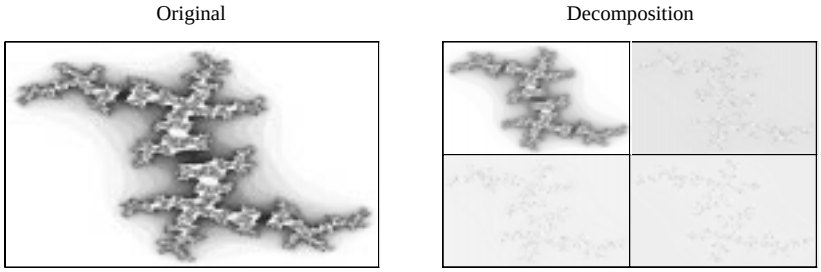


Figure 2: ドベシィのウェーブレットを使ってジュリア集合を画像処理した例

を認識しやすくなる利点があるが，多くの情報を必要とするので効率的とはいえない．効率的なウェーブレット変換という考え方を押し進めると，ウェーブレットによる正規直交基底が構成できるかという問題になり，1985 年にメイエは時間周波数解析に応用できるような良い性質をもったウェーブレットによる正規直交基底が存在しないことを証明しようとして，逆に構成してしまったというから面白い．ウェーブレット展開の誕生である．

> Meyer: Principe d'incertitude, bases hilbertiennes et algèbres d'opérateurs, *Séminaire Bourbaki*, **662** (1986), 209–223.

1986 年にはすでに述べたようにマラーが数学，信号理論，画像処理における共通性に気づき，ラプラシアンピラミッドアルゴリズムに基づき高速ウェーブレット変換アルゴリズムを考えている．この新しいアルゴリズムは信号処理や画像処理においてはデータ圧縮等に，コンピュータ映像においてはエッヂの検出等に広く使われている．当初はスプラインとよばれる関数から，バトル（Battle）とルマリエ（Lemarié）が構成したウェーブレットを切り落として使っていたので，誤差がつきものであった．この切り落とし誤差を避けるにはコンパクト台をもつウェーブレット基底を構成しなければならなかった．ドベシィは 1987 年にコンパクト台をもつウェーブレット基底を構成したのであるが，信号理論における有限インパルス応答フィルタに関連した考察により，よく知られた関数や公式などを使って構成したのではなく，カスケードアルゴリズムという反復操作を無限回おこなった極限関数として構成し，まさしくコンピュータ時代の産物といえるものであった．

> Daubechies: Orthonormal bases of compactly supported wavelets, *Comm. Pure Appl. Math.*, **41** (1988), 909–996.

彼女のコンパクト台をもつウェーブレット基底を使った高速ウェーブレット変換アルゴリズムにより，多くの分野で広くウェーブレット解析が使われている． Figure 2 はドベシィのウェーブレット ($N = 3$) を使ってジュリア集合（Julia Set）とよばれる画像を MATLAB により画像処理した例である．Decompositionの左上の画像は Original のデータ数を 1/4倍に圧縮した画像になる．

1988 年以降もウェーブレットに関する多くの仕事があるが，その中で代表的なものをいくつかあげると，画像処理における対称性の要求から生まれた双直交（biorthogonal）ウェーブレット，解析したい信号にあわせて基底を取り替えて時間周波数解析をおこなう

ウェーブレットパケット（wavelet packet）などがある．これらの新しい理論はすでに応用されていて，有名なところでは FBI の指紋検索システムに使われている．ウェーブレット理論の進歩はめざましく，情報はインターネットを使い多くの人々の間で交換され，新しい時代の共同研究をかいま見るようである．

2 フーリエ窓変換

フーリエ変換から始めよう．関数 f のフーリエ変換と関数 g の逆フーリエ変換を

$$\mathcal{F}[f(x)](\xi) = \widehat{f}(\xi) := \int e^{-ix\xi}\, f(x)\, dx$$

$$\mathcal{F}^{-1}[g(\xi)](x) := \frac{1}{2\pi}\int e^{ix\xi}\, g(\xi)\, d\xi$$

とおく．ここで大切なのは次のパーシバルの等式である．

$$(f,g) = \frac{1}{2\pi}\big(\widehat{f},\widehat{g}\big), \qquad f,g \in L^2(\mathbf{R}) \tag{1}$$

関数 f の点 $x=b$ の近傍での性質が知りたいとしよう．f のフーリエ変換は積分を $\mathbf{R}$ 全体でおこなうので，f のすべての点における情報を含んでしまう．このため，よく使われるのが切り落とし関数を f にかける方法である．このような操作を f を点 $x=b$ の近傍に**局所化**するという．点 $x=b$ の近傍で 1 に近く，遠くで 0 に近づく関数を考えよう．このような関数として，点 $x=0$ の近傍で 1 に近く，遠くで 0 に近づく関数 $w(x)$ をひとつとり，これを平行移動した関数 $w(x-b)$ の複素共役 $\overline{w(x-b)}$ を考えるとフーリエ変換の色々な定理がうまく使えて都合がよい．

定義 1 恒等的に 0 でない関数 $w(x) \in L^2(\mathbf{R})$ が $xw(x) \in L^2(\mathbf{R})$ を満たすとき，**窓関数**とよばれる．

$w(x)$ が窓関数なら，$w(x) \in L^1(\mathbf{R})$ が示せるので，リーマン・ルベーグの定理より $\widehat{w}(\xi)$ は有界連続関数となる．

定義 2 $w(x)$ を窓関数とする．$f \in L^2(\mathbf{R})$ に対し，$f(x)\overline{w(x-b)}$ のフーリエ変換を f の窓関数 $w(x)$ による**窓フーリエ変換**という．

後で述べる時間周波数の窓を考えるには，$w(x)$ と $\widehat{w}(\xi)$ が窓関数であることが必要である．$w(x)$ と $\widehat{w}(\xi)$ が窓関数であるとしよう．f の窓関数 $w(x)$ による窓フーリエ変換の $\xi=\omega$ における値

$$\int e^{-ix\omega}\, f(x)\overline{w(x-b)}\, dx$$

は

$$W_{b,\omega}(x) := e^{i\omega x}\, w(x-b)$$

Figure 3: $\mathrm{Re}\, W_{b,\omega}$ の概形

とおくと，内積を使って $(f, W_{b,\omega})$ とかけることに注意しよう．ω を取り替えて $\mathrm{Re}\, W_{b,\omega}$ を図示したのが Figure 3 である．ω を取り替えることにより，窓の輪郭はかわらないが，振動の数がかわることに注意しよう． パーシバルの等式 (1) を使うと，

$$V_{b,\omega}(\xi) := \frac{1}{2\pi}\widehat{W_{b,\omega}}(\xi) = \frac{e^{i\omega b}}{2\pi}\, e^{-i\xi b}\, \widehat{w}(\xi - \omega)$$

とおくとき，

$$(f, W_{b,\omega}) = (\widehat{f}, V_{b,\omega}) \tag{2}$$

とかける．次節でみるように，窓関数の選び方によって局所化する点が変わるから，$W_{b,\omega}$ が点 $x = \widetilde{b}$ の近傍に局所化する切り落とし関数になっているとし，$V_{b,\omega}$ が点 $\xi = \widetilde{\omega}$ の近傍に局所化する切り落とし関数になっているとすると，等式 (2) の意味するところは，ひとつの値 (2) が f を点 $x = \widetilde{b}$ の近傍に $W_{b,\omega}$ で局所化したものの積分値と $\widehat{f}$ を点 $\xi = \widetilde{\omega}$ の近傍に $V_{b,\omega}$ で局所化したものの積分値の両方を同時に表しているということである．このように関数 f から f の点 $x = \widetilde{b}$ の近傍における情報と $\widehat{f}$ の点 $\xi = \widetilde{\omega}$ の近傍における情報を取り出すことを f を点 $(x, \xi) = (\widetilde{b}, \widetilde{\omega})$ の近傍に**超局所化**するという．これは**時間周波数解析**のひとつの数学的表現である．

定義 **3** $w(x)$ を窓関数とする．このとき $\widehat{w}(\xi)$ が窓関数となるなら，f の窓関数 $w(x)$ による窓フーリエ変換を特に **短時間フーリエ変換**という．

3 フーリエ解析の不確定性原理

ペーリー・ウィナーの定理によれば，関数 f の台がコンパクトなら，つまり $f(x) \neq 0$ となるところが有限の区間に含まれるなら，f のフーリエ像 $\widehat{f}$ は解析関数になるので，恒等的に 0 でない解析関数の零点は孤立していることを考えると，f が恒等的に 0 でない限りは $\widehat{f}$ の台はコンパクトにはなり得ない．切り落とし関数をかけて局所化するときには，コンパクト台をもつ関数を使うと台の外では 0 となるので，この部分が全く影響しないことがわかり望ましいが，(2) のようにひとつの窓関数から作った切り落とし関数 $W_{b,\omega}$ と $V_{b,\omega}$ で超局所化するときには，両方とも同時にコンパクト台をもつ関数にすることはできない．そこで関数 $W_{b,\omega}$ と $V_{b,\omega}$ で本質的に切り落とされる部分はどこかということが問題になるが，データ解析でおなじみの標準偏差がひとつの答えになる．

定義 **4** $w(x)$ を窓関数とする．このとき

$$x^* := \frac{1}{||w||^2}\int_{\mathbf{R}} x|w(x)|^2\, dx$$

を $w(x)$ の**中心**,

$$\Delta_w := \frac{1}{||w||}\Big(\int_{\mathbf{R}}(x-x^*)^2|w(x)|^2\,dx\Big)^{1/2}$$

を $w(x)$ の**幅**という.

$w(x)$ がデータ解析における分布関数のとき，ちょうど x^* が期待値，Δ_w が標準偏差になっているので閉区間 $[x^*-\Delta_w, x^*+\Delta_w]$ が窓関数 $w(x)$ により本質的に切り落とされる部分であるといってよいであろう．関数 $W_{b,\omega}$ の場合には b だけ平行移動されて，$[x^*+b-\Delta_w, x^*+b+\Delta_w]$ となる．また，$\widehat{w}(\xi)$ が窓関数となるなら，$V_{b,\omega}$ により本質的に切り落とされる部分は，$[\omega^*+\omega-\Delta_{\widehat{w}}, \omega^*+\omega+\Delta_{\widehat{w}}]$ である．したがって，2 節の $\widetilde{b}, \widetilde{\omega}$ はそれぞれ $\widetilde{b}=x^*+b, \widetilde{\omega}=\omega^*+\omega$ であったことになる．そこで短時間フーリエ変換の場合に，(2) によって本質的に切り落とされる部分を (x,ξ)-平面（**相平面**とよぶ）で考えた長方形領域

$$[x^*+b-\Delta_w, x^*+b+\Delta_w]\times[\omega^*+\omega-\Delta_{\widehat{w}}, \omega^*+\omega+\Delta_{\widehat{w}}]$$

を x を時間，ξ を周波数とみて，**時間周波数の窓**とよぶ.

時間周波数の窓の形は窓関数だけから決まってしまい，(b,ω) を動かしても平行移動するだけである．この面積が小さいほど良い局所化なので，どのように窓関数を選べば時間周波数の窓が小さくなるかが問題となる．これについては次のフーリエ解析の不確定性原理が知られている．証明はたとえば，[5] をみよ.

定理 1 (フーリエ解析の不確定性原理) $w(x)$ と $\widehat{w}(\xi)$ が窓関数であるとし

$$g_\alpha(x) := \frac{1}{2\sqrt{\pi\alpha}}\,e^{-x^2/4\alpha}, \qquad \alpha>0$$

とおく．このとき $\Delta_w\Delta_{\widehat{w}} \geq 1/2$ が成り立ち，等号成立は $w(x)$ が

$$w(x) = c\,e^{iax}\,g_\alpha(x-b), \qquad c\neq 0,\ \ a,b\in\mathbf{R}$$

の形のときに限る.

この不確定性原理によれば，どのように窓関数を選んでも時間周波数の窓の面積は 2 より小さくはならず，時間周波数の窓が時間について小さくなるように窓関数を選ぶと，周波数については逆に大きくなってしまうことになる．つまり，時間と周波数について，同時には精度を上げられないということである.

4 連続ウェーブレット変換

周期的な運動を考えてみよう．周期的な運動なので少なくとも 1 周期以上観測しなければどのような運動かわからないし，あまり多くの周期について観測すると，ひとつひとつの周期で運動が変わっている場合には，観測結果が平均化されてしまう．つまり，時間周波

数の窓を通してこの運動を表す関数をみた場合，高い振動数のところでは時間を短くしないと何周期分もみてしまうし，低い振動数のところでは逆に時間を長くしなと 1 周期分がみられない．このように応用上は時間周波数の窓の面積は変えられなくても，運動に応じて時間周波数の窓の形を変える必要がある．前節で述べたように，時間周波数の窓の形は窓関数だけから決まってしまい，形を変えるには窓関数を替えなければならない．どのように取り替えたらよいのだろうか．そのひとつの答えがここで述べる連続ウェーブレット変換である．

関数 $\psi(x)$ に対し，$C_\psi := \int_{\mathbf{R}} |\widehat{\psi}(\xi)|^2/|\xi|\,d\xi$ とおく．

定義 5 関数 $\psi(x)$ と $\widehat{\psi}(\xi)$ は窓関数であって，かつ $\psi(x)$ が

$$\int_0^{+\infty} |\widehat{\psi}(\xi)|^2/\xi\,d\xi = \int_0^{+\infty} |\widehat{\psi}(-\xi)|^2/\xi\,d\xi = \frac{1}{2}C_\psi < +\infty$$

を満たすとき，**アナライジングウェーブレット**（解析のためのウェーブレット）とよぶ．

関数 ψ がアナライジングウェーブレットのとき，$\widehat{\psi}(\xi)$ は有界連続関数であるから，$C_\psi < +\infty$ が成り立つためには，$\widehat{\psi}(0) = 0$ が成り立つことが必要である．これは，$\int e^{i0x}\,\psi(x)\,dx = \widehat{\psi}(0)$ より，$\int \psi(x)\,dx = 0$ （積分平均が 0 という）が必要であることを意味する．この条件はアナライジングウェーブレット ψ が振動している（正の部分と負の部分の面積が同じ）ことをあらわしている．

応用上アナライジングウェーブレットには，数回の微分可能性と急減少性（どんな多項式 $p(x)$ をかけても $\lim_{|x|\to+\infty} |p(x)f(x)| = 0$ が成り立つこと）を要請することが多い．

定義 6 関数 ψ がアナライジングウェーブレットのとき，関数 $f(x) \in L^2(\mathbf{R})$ と $a, b \in \mathbf{R}, a > 0$ に対し，次の積分

$$(W_\psi f)(b,a) := \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{\mathbf{R}} f(x)\overline{\psi\Big(\frac{x-b}{a}\Big)}\,dx \tag{3}$$

を**ウェーブレット係数**とよび，$f(x)$ から $(W_\psi f)(b,a)$ への対応を**ウェーブレット変換**という．また，関数 $f(x) \in L^2(\mathbf{R})$ が連続である点 $x \in \mathbf{R}$ において，次の再構成公式が成り立つ．たとえば，[5] をみよ．

$$f(x) = \frac{2}{C_\psi} \int_0^{+\infty} \Big[\int_{\mathbf{R}} (W_\psi f)(b,a) \frac{1}{\sqrt{a}}\,\psi\Big(\frac{x-b}{a}\Big)\,db\Big]\,\frac{da}{a^2} \tag{4}$$

これを**ウェーブレット逆変換**という．

ウェーブレット変換は，$\psi_a(x) := a^{-1/2}\psi(x/a)$ とおくと，

$$(W_\psi f)(b,a) = \big(f, \psi_a(x-b)\big)$$

とかけるので，ちょうど短時間フーリエ変換で $W_{b,\omega}(x) = \psi_a(x-b)$ つまり $w(x) = e^{-i\omega(x+b)}\,\psi_a(x)$ とおいた場合になっている． しかしながら，窓関数を周波数によって取

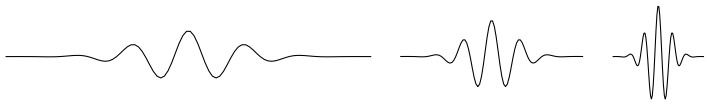


Figure 4: $\psi_a(x)$ の概形

り替えたくないので，特に $\omega = 0$ のときを考えると，(3) は，$w(x) = \psi_a(x)$ とおいた場合の $(f, W_{b,0})$ であると思い直せる．a を取り替えて $\psi_a(x)$ を図示したのが Figure 4 である．a を取り替えても，振動の数はかわらず形が一定であることに注意しよう．このとき，$||w|| = ||\psi_a|| = ||\psi_1||$ が成り立ち，窓関数 $\psi_1 = \psi$ の中心を x^*，幅を Δ_ψ とおくと，窓関数 ψ_a の中心は ax^*，幅が $a\Delta_\psi$ になっている．一方，$||\widehat{w}|| = ||\widehat{\psi}_a|| = ||\widehat{\psi}_1||$ が成り立ち，窓関数 $\widehat{\psi}$ の中心を ω^*，幅を $\Delta_{\widehat{\psi}}$ とおくと，窓関数 $\widehat{\psi}_a$ の中心は ω^*/a，幅が $\Delta_{\widehat{\psi}}/a$ になっている．ウェーブレット変換の時間周波数の窓はどうなっているのだろうか．これは，$w(x) = \psi_a(x)$ とおいた場合には

$$(W_\psi f)(b, a) = (f, W_{b,0}) = \left(\widehat{f}, V_{b,0}\right)$$

とかけることから，

$$[b + ax^* - a\Delta_\psi, b + ax^* + a\Delta_\psi] \times \left[\omega^*/a - \Delta_{\widehat{\psi}}/a, \omega^*/a + \Delta_{\widehat{\psi}}/a\right]$$

となる．周波数についてみると，アナライジングウェーブレット ψ を決めれば，窓の幅がパラメータ a だけで決まることに注意しよう．大切なことは，f を時間 $x = b + ax^*$ の近傍に局所化するとき，短時間観測しようとしてパラメータ a を小さくとると，周波数については自動的に広がって高周波が調べられるようになり，逆に，長時間観測しようとしてパラメータ a を大きくとると，周波数については自動的に狭くなり，低周波が調べられるようになるということである．

5 ウェーブレット展開

次の記号法を使う．$[0, 2\pi/2^j]$ の 0 と $2\pi/2^j$ を同一視したトーラスを $2^j\mathbf{T}$ とかく．関数 f と整数 $j, k \in \mathbf{Z}$ に対し，

$$f_{jk}(x) := 2^{j/2} f(2^j x - k)$$

とかく．このとき，$||f_{jk}|| = ||f||$ が成り立つ．

定義 7 関数 $\psi \in L^2(\mathbf{R})$ に対し，$\{\psi_{jk}\}_{j,k\in\mathbf{Z}}$ が $L^2(\mathbf{R})$ の正規直交基底となるとき，ψ を**ウェーブレット関数**，または単に**ウェーブレット**という．このとき，$f \in L^2(\mathbf{R})$ の正規直交基底 $\{\psi_{jk}\}_{j,k\in\mathbf{Z}}$ に関する展開

$$f = \sum_{j,k\in\mathbf{Z}} (f, \psi_{jk})\, \psi_{jk} \tag{5}$$

を**ウェーブレット展開**とよぶ.

特に，ψ がアナライジングウェーブレットであれば，$(f,\psi_{jk}) = (W_\psi f)(k/2^j, 1/2^j)$ となり，(4) に対応して，

$$f(x) = \sum\nolimits_{j,k\in\mathbf{Z}} (W_\psi f)(k/2^j, 1/2^j)\, 2^{j/2}\psi(2^j x - k) \tag{6}$$

が成り立つ．これより，ウェーブレット変換がフーリエ変換に対応すると思えば，(6) はフーリエ級数に対応するといえる．

このような関数 ψ を直接構成するのではなく，まず，**スケーリング関数**とよばれる別の関数 φ を構成して，このスケーリング関数 φ をもとに，ウェーブレット関数 ψ を構成する一般的な方法（**多重解像度解析**）が知られている．この節ではスケーリング関数を構成して，ウェーブレット関数の構成は次の節にゆずろう．

補題 **1** 関数 $f \in L^2(\mathbf{R})$ に対し，関数列 $\{f(x-k)\}_{k\in\mathbf{Z}}$ が正規直交系になるのは，（ほとんどいたるところの ξ に対し，）

$$\sum\nolimits_{k\in\mathbf{Z}} |\widehat{f}(\xi+2\pi k)|^2 \equiv 1 \tag{7}$$

が成り立つとき，かつそのときに限る．

証明 $F(\xi) := \sum_{k\in\mathbf{Z}} \widehat{f}(\xi+2\pi k)\overline{\widehat{f}(\xi+2\pi k)}$ とおく．$F(\xi) \in L^1(\mathbf{T})$ である．$\{f(x-k)\}_{k\in\mathbf{Z}}$ の正規直交性は (1) より，任意 $\ell \in \mathbf{Z}$ に対し，

$$\begin{aligned}
\delta_{\ell,0} &= \int_{\mathbf{R}} f(x-\ell)\overline{f(x)}\,dx \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbf{R}} e^{-i\ell\xi}\widehat{f}(\xi)\,\overline{\widehat{f}(\xi)}\,d\xi \\
&= \sum\nolimits_{k\in\mathbf{Z}} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-i\ell(\xi+2\pi k)}\,\widehat{f}(\xi+2\pi k)\overline{\widehat{f}(\xi+2\pi k)}\,d\xi \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-i\ell\xi}\,F(\xi)\,d\xi = \widehat{F}(\ell)
\end{aligned}$$

が成り立つことと同値である．フーリエ級数を考えれば，$F(\xi) = \sum_{\ell\in\mathbf{Z}} \delta_{l,0}\, e^{i\ell\xi} \equiv 1$ と同値である．□

この補題より，φ が (7) を満たすように構成できれば，$j \in \mathbf{Z}$ に対し，

$$(\varphi_{jk}, \varphi_{j\ell}) = \big(\varphi(x-k), \varphi(x-\ell)\big) = \delta_{k,\ell}$$

が成り立つ．次の条件 1 を満たす関数 φ は (7) を満たす．

条件 **1** $\widehat{\varphi}$ は $0 \le \widehat{\varphi} \le 1$ を満たす無限回微分可能な実数値の偶関数で，

$$\widehat{\varphi}(\xi) = \begin{cases} 1 & -2\pi/3 \le \xi \le 2\pi/3 \\ 0 & \xi \le -4\pi/3, \quad 4\pi/3 \le \xi \end{cases}$$

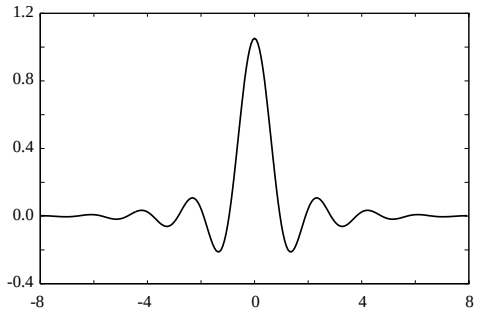


Figure 5: メイエのスケーリング関数

かつ

$$\widehat{\varphi}(\xi)^2 + \widehat{\varphi}(2\pi - \xi)^2 \equiv 1, \qquad 0 \le \xi \le 2\pi \tag{8}$$

を満たす.

この条件 1 を満たす関数 φ を**メイエのスケーリング関数**とよぶ．メイエのスケーリング関数 $\varphi(x)$ のグラフの概形は Figure 5 ようになる．対称軸が $x = 0$ であって，台は無限に広がっているが非常に速く減衰しており，積分すると面積が 1（正の部分と負の部分をキャンセルして）に等しくなることに注意しよう.

条件 1 を満たす φ を作ろう．(8) 以外の条件を満たす関数を作ることはたやすい．そのような関数のひとつを φ_0 としよう．このとき,

$$\varphi(x) := \mathcal{F}^{-1}\left[\widehat{\varphi}_0(\xi)/\sqrt{\widehat{\varphi}_0(\xi)^2 + \widehat{\varphi}_0(2\pi - \xi)^2}\,\right]$$

とおけば φ は条件 1 を満たす.

補題 **2** $\{f(x-k)\}_{k\in\mathbf{Z}}$ は $L^2(\mathbf{R})$ の正規直交系であるとする．整数 $j \in \mathbf{Z}$ に対し，$\mathcal{V}_j := \overline{\mathrm{Span}}\,\{f_{jk}(x) := 2^{j/2} f(2^j x - k)\}_{k\in\mathbf{Z}}$ とおく．このとき，$\mathcal{V}_j$ のフーリエ像 $\mathcal{F}\mathcal{V}_j$ は,

$$\mathcal{F}\mathcal{V}_j = \{m(\xi/2^j)\widehat{f}(\xi/2^j);\ \ m(\xi) \in L^2(\mathbf{T})\} \tag{9}$$

と特徴づけることができる．これを

$$\mathcal{F}\mathcal{V}_j = L^2(2^{-j}\mathbf{T})\widehat{f}(\xi/2^j) \tag{10}$$

とあらわす.

証明 $g \in \mathcal{V}_j$ なら，$a_k := (g, f_{jk})$ とおくとき，$g = \sum_{k\in\mathbf{Z}} a_k\, f_{jk}$ とかける．前節で述べたように，$\sum_{k\in\mathbf{Z}} |a_k|^2 < +\infty$ である．これをフーリエ変換してみると,

$$\widehat{g}(\xi) = 2^{-j/2} \sum\nolimits_{k\in\mathbf{Z}} a_k\, \widehat{f}(\xi/2^j)\, e^{-ik\xi/2^j}$$

となるから，$m_g(\xi) := 2^{-j/2}\sum_{k\in\mathbf{Z}} a_k\, e^{-ik\xi}$ とおくと，$m_g(\xi) \in L^2(\mathbf{T})$ であって，

$$\widehat{g}(\xi) = m_g(\xi/2^j)\widehat{f}(\xi/2^j)$$

が成り立つ．逆も同様である．□

補題 2 によれば，$g, h \in \mathcal{V}_j$ なら，ある関数 $m_g(\xi), m_h(\xi) \in L^2(\mathbf{T})$ があって，$\widehat{g}(\xi) = m_g(\xi/2^j)\widehat{f}(\xi/2^j)$ かつ $\widehat{h}(\xi) = m_h(\xi/2^j)\widehat{f}(\xi/2^j)$ が成り立つ．このとき，次の系が成り立つ．

系 1

$$(g,h) = \frac{2^j}{2\pi}\int_0^{2\pi} m_g(\xi)\overline{m_h(\xi)}\,d\xi \tag{11}$$

証明

$$\begin{aligned}(g,h) &= \frac{1}{2\pi}(\widehat{g},\widehat{h}) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbf{R}} m_g(\xi/2^j)\overline{m_h(\xi/2^j)}\,|\widehat{f}(\xi/2^j)|^2\,d\xi \\ &= \frac{2^j}{2\pi}\sum\nolimits_{k\in\mathbf{Z}}\int_0^{2\pi} m_g(\xi+2\pi k)\overline{m_h(\xi+2\pi k)}\,|\widehat{f}(\xi+2\pi k)|^2\,d\xi\end{aligned}$$

だから，$m_g(\xi), m_h(\xi) \in L^2(\mathbf{T})$ が周期 2π であることに注意して，補題 1 を使うとよい．□

補題 3 関数 φ は条件 1 を満たすとし，$V_j := \overline{\mathrm{Span}}\,\{\varphi_{jk}\}_{k\in\mathbf{Z}}$ とおく．このとき，$\cap_{j\in\mathbf{Z}} V_j = \{0\}$ かつ $\overline{\cup_{j\in\mathbf{Z}} V_j} = L^2(\mathbf{R})$ が成り立つ．

証明 フーリエ変換がヒルベルト空間 $L^2(\mathbf{R})$ の同型を与えることから，$\cap_{j\in\mathbf{Z}}\mathcal{F}V_j = \{0\}$ かつ $\overline{\cup_{j\in\mathbf{Z}}\mathcal{F}V_j} = L^2(\mathbf{R})$ を示せばよい．

$\cap_{j\in\mathbf{Z}}\mathcal{F}V_j = \{0\}$ は (10) で $f = \varphi$ とおいた式と

$$\mathrm{supp}\,\widehat{\varphi}(\xi/2^j) \subset [-2^{j+2}\pi/3, 2^{j+2}\pi/3] \tag{12}$$

より，$j \to -\infty$ とすれば明らかである．

$\overline{\cup_{j\in\mathbf{Z}}\mathcal{F}V_j} = L^2(\mathbf{R})$ を示そう．任意の閉区間 $[a,b]$ に対し，$[a,b]$ 上で 1，それ以外で 0 となる関数を $\chi_{[a,b]}(\xi)$ とおく．この関数を閉区間 $[a,b]$ の**特性関数**とよぶ．特性関数の（有限個の）線形結合を**階段関数**という．$L^2(\mathbf{R})$ の元は階段関数でいくらでも近似できることが知られているから，$\chi_{[a,b]} \in \cup_{j\in\mathbf{Z}}\mathcal{F}V_j$ を示せばよい．

自然数 j を $[a/2^j, b/2^j] \subset [-1,1]$ となるように十分大きくとり，関数 $\chi_{[a/2^j,b/2^j]}(\xi)$ を周期 2π の周期関数に拡張した関数を $m(\xi)$ とおく．関数 $\widehat{\varphi}(\xi/2^j)$ は $[-2^j, 2^j]$ 上で 1 だから，(12) より $\chi_{[a,b]}(\xi) = m(\xi/2^j)\widehat{\varphi}(\xi/2^j) \in \mathcal{F}V_j$ である．□

補題 4 関数 φ は条件 1 を満たすとする．このとき，$V_j \subset V_{j+1}$ が成り立つ．

証明　これは，$\widehat{\varphi}(\xi/2^j) \in \mathcal{F}V_{j+1}$ を示せばよい．$\operatorname{supp}\widehat{\varphi}(2\xi) \subset [-2\pi/3, 2\pi/3]$ より，$\widehat{\varphi}(2\xi) \in L^2[-\pi,\pi]$ だから，$\widehat{\varphi}(2\xi)$ を周期 2π の周期関数に拡張し $m_0(\xi)$ とおくと，$m_0(\xi) \in C^\infty(\mathbf{T})$ （$\mathbf{T}$ 上無限回微分可能な関数全体の集合）である．(12) と $[-2^{j+2}\pi/3, 2^{j+2}\pi/3]$ 上で $\widehat{\varphi}(\xi/2^{j+1}) \equiv 1$ より，$\widehat{\varphi}(\xi/2^j) = m_0(\xi/2^{j+1})\widehat{\varphi}(\xi/2^{j+1}) \in \mathcal{F}V_{j+1}$ である．□

j を整数全体にわたって加え合わせた $\{\varphi_{jk}\}_{j,k\in\mathbf{Z}}$ は $L^2(\mathbf{R}) = \overline{\cup_{j\in\mathbf{Z}} V_j}$ より，$L^2(\mathbf{R})$ の元を表すことができるが，$V_j \subset V_{j+1}$ だから正規直交基底にはなり得ない．そこで，別の関数 $\psi \in L^2(\mathbf{R})$ で，$\{\psi(x-k)\}_{k\in\mathbf{Z}}$ が正規直交系となり，$W_j := \overline{\operatorname{Span}}\,\{\psi_{jk}\}_{k\in\mathbf{Z}}$ とおくとき，$j \neq j'$ に対し，$W_j \cap W_{j'} = \{0\}$ となるようにしたい．このときには，$\{\psi_{jk}\}_{k\in\mathbf{Z}} \cup \{\psi_{j'k'}\}_{k'\in\mathbf{Z}}$ が正規直交系となるから，$W_j \perp W_{j'}$ であり，

$$\overline{\operatorname{Span}}\big(\{\psi_{jk}\}_{k\in\mathbf{Z}} \cup \{\psi_{j'k'}\}_{k'\in\mathbf{Z}}\big)$$

を W_j と $W_{j'}$ の**直交和**とよび，$W_j \oplus W_{j'}$ とかく．

もし，$V_{j+1} = V_j \oplus W_j$ となるように ψ が構成できれば，$\cup_{j\in\mathbf{Z}} V_j = V_{j'} \oplus \big(\oplus_{j>j'} W_j\big)$ だから，$j' \to -\infty$ とすれば，補題 3 より，$V_{j'} \searrow \{0\}$ が成り立つから，$\cup_{j\in\mathbf{Z}} V_j = \oplus_{j\in\mathbf{Z}} W_j$ となり，$\{\psi_{jk}\}_{j,k\in\mathbf{Z}}$ は $L^2(\mathbf{R})$ の正規直交基底となる．

ウェーブレット展開 (5) を時間周波数解析に使うことができるが，$j \to -\infty$ のとき，ψ_{jk} の時間周波数の窓は面積は不変だが時間方向に伸びてしまう．周波数解析であるフーリエ解析を補う意味では時間について局所化できるほうが望ましい．そこで正規直交基底 $\{\varphi_{0k}\}_{k\in\mathbf{Z}} \cup \{\psi_{jk}\}_{j\in\mathbf{Z}_+,k\in\mathbf{Z}}$ に関する展開：

$$f = \sum\nolimits_{k\in\mathbf{Z}} (f, \varphi_{0k})\, \varphi_{0k} + \sum\nolimits_{j\in\mathbf{Z}_+,k\in\mathbf{Z}} (f, \psi_{jk})\, \psi_{jk} \tag{13}$$

を考える．この展開 (13) も**ウェーブレット展開**とよばれる．ウェーブレット展開 (13) で使われる正規直交基底をなす関数の時間周波数の窓をタイル張りにして概念的に表現したのが Figure 6 である．ここで使っている関数はドベシィの $N = 3$ のスケーリング関数とウェーブレットであって，時間周波数の窓は下から順に $j = 0, 1, 2, 3$ に対応する．もちろん，スケーリング関数とウェーブレットの時間周波数の窓の中心と大きさは違うのだが，Figure 6 ではスケーリング関数の窓はウェーブレットの窓に含めている．

6　メイエのウェーブレット

前節で述べたことをもとにして，メイエのウェーブレットの構成法について考えよう．それにはいくつかの補題が必要である．

関数 $f, g \in L^2(\mathbf{R})$ に対し，$\{f(x-k)\}_{k\in\mathbf{Z}}$ と $\{g(x-k)\}_{k\in\mathbf{Z}}$ のそれぞれが正規直交系になるとする．さらに，$\mathcal{V}_j := \overline{\operatorname{Span}}\,\{f_{jk}\}_{k\in\mathbf{Z}}$，$\mathcal{W}_j := \overline{\operatorname{Span}}\,\{g_{jk}\}_{k\in\mathbf{Z}}$ とおくとき，$\mathcal{W}_0 \subset \mathcal{V}_1$ を満たすとする．補題 2 より，ある関数 $m_1(\xi) \in L^2(\mathbf{T})$ があって，

$$\widehat{g}(\xi) = m_1(\xi/2)\widehat{f}(\xi/2) \tag{14}$$

とかける．このとき，次の補題が成り立つ．

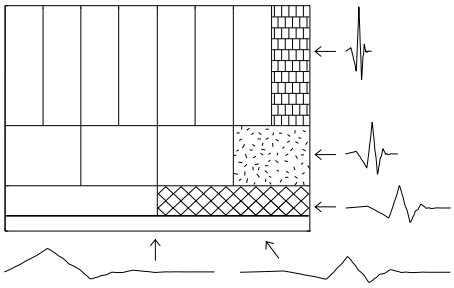


Figure 6: ウェーブレット展開における時間周波数の窓の概念図

補題 **5**

$$|m_1(\xi)|^2 + |m_1(\xi+\pi)|^2 \equiv 1 \tag{15}$$

証明 (14) を (7) に代入してみよう．k が偶数のときと奇数のときの和にわけて，m_1 が周期 2π の周期関数であることに注意すると，

$$\begin{aligned}
1 &= \sum\nolimits_{k\in\mathbf{Z}} |m_1(\xi/2+\pi k)\widehat{f}(\xi/2+\pi k)|^2 \\
&= \sum\nolimits_{k'\in\mathbf{Z}} |m_1(\xi/2+2\pi k')|^2|\widehat{f}(\xi/2+2\pi k')|^2 \\
&\quad + \sum\nolimits_{k''\in\mathbf{Z}} |m_1(\xi/2+\pi+2\pi k'')|^2|\widehat{f}(\xi/2+\pi+2\pi k'')|^2 \\
&= |m_1(\xi/2)|^2 \sum\nolimits_{k'\in\mathbf{Z}} |\widehat{f}(\xi/2+2\pi k')|^2 \\
&\quad + |m_1(\xi/2+\pi)|^2 \sum\nolimits_{k''\in\mathbf{Z}} |\widehat{f}(\xi/2+\pi+2\pi k'')|^2
\end{aligned}$$

となるから (7) を使えばよい．□

特に，$g=f$ のときを考えよう．$\{f(x-k)\}_{k\in\mathbf{Z}}$ が正規直交系であって，$\mathcal{V}_0 \subset \mathcal{V}_1$ を満たすとする．補題 2 より，ある関数 $m_0(\xi) \in L^2(\mathbf{T})$ があって，

$$\widehat{f}(\xi) = m_0(\xi/2)\widehat{f}(\xi/2) \tag{16}$$

とかける．このとき，次の系が成り立つ．

系 **2**

$$|m_0(\xi)|^2 + |m_0(\xi+\pi)|^2 \equiv 1 \tag{17}$$

この補題と系から $m_1(\xi), m_0(\xi) \in L^\infty(\mathbf{T})$ （$\mathbf{T}$ 上，本質的に有界な関数の集合全体）であることがわかることに注意しよう．

$\mathcal{V}_1$ における $\mathcal{V}_0$ の直交補空間を $\mathcal{V}_0^\perp$ とおく．ウェーブレットを構成するには，$\mathcal{V}_0^\perp$ の構造について考える必要がある．フーリエ変換によってヒルベルト空間の構造は保存されるから，$\mathcal{F}\mathcal{V}_1$ における $\mathcal{F}\mathcal{V}_0$ の直交補空間を考えよう．補題 2 より，

$\mathcal{F}\mathcal{V}_0 = L^2(\mathbf{T})\widehat{f}(\xi)$ である．(16) より $\mathcal{F}\mathcal{V}_0 = L^2(\mathbf{T})m_0(\xi/2)\widehat{f}(\xi/2)$ とかける．補題 2 より，$\mathcal{F}\mathcal{V}_1 = L^2(2^{-1}\mathbf{T})\widehat{f}(\xi/2)$ であることに注意し，系 1 を使うと，$L^2(2^{-1}\mathbf{T})\widehat{f}(\xi/2)$ と $L^2(2^{-1}\mathbf{T})$ が同型であることが示せる．したがって，$L^2(\mathbf{T})m_0(\xi/2)$ の $L^2(2^{-1}\mathbf{T})$ における直交補空間を $\widetilde{\mathcal{V}}_0^{\perp}$ とおき，この空間の構造を調べればよいことになる．

整数 $j \in \mathbf{Z}$ に対し，自然な対応 $L^2(\mathbf{T}) \ni \ell(\xi) \mapsto \ell(2^{-j}\xi) \in L^2(2^{-j}\mathbf{T})$ により，$L^2(\mathbf{T})$ と $L^2(2^{-j}\mathbf{T})$ とはヒルベルト空間として同型になるから，任意の $\widetilde{\ell}(\xi) \in L^2(2^{-j}\mathbf{T})$ に対し，ある $\ell(\xi) \in L^2(\mathbf{T})$ があって，$\widetilde{\ell}(\xi) = \ell(2^{-j}\xi)$ が成り立つことを注意しておく．この自然な対応がトーラス $2^j\mathbf{T}$ を $[0, 2\pi/2^j]$ の 0 と $2\pi/2^j$ を同一視したトーラスと思うひとつの理由である．

補題 **6** $\{f(x-k)\}_{k\in\mathbf{Z}}$ が正規直交系であって，$\mathcal{V}_0 \subset \mathcal{V}_1$ を満たすとする．このとき，

$$\widetilde{\mathcal{V}}_0^{\perp} = \left\{\ell(\xi/2) \in L^2(2^{-1}\mathbf{T});\ \ m_0(\xi)\overline{\ell(\xi)} + m_0(\xi+\pi)\overline{\ell(\xi+\pi)} \equiv 0\right\} \tag{18}$$

が成り立つ．

証明 関数の周期性に注目すると，$\ell(\xi/2) \in \widetilde{\mathcal{V}}_0^{\perp}$ は，任意の $n(\xi) \in L^2(\mathbf{T})$ に対し，

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^{4\pi} n(\xi)m_0(\xi/2)\overline{\ell(\xi/2)}\,d\xi \;=\; 2\int_0^{2\pi} n(2\xi')m_0(\xi')\overline{\ell(\xi')}\,d\xi' \\ &= 2\int_0^{\pi} n(2\xi')\{m_0(\xi')\overline{\ell(\xi')} + m_0(\xi'+\pi)\overline{\ell(\xi'+\pi)}\,\}\,d\xi' \end{aligned} \tag{19}$$

と同値である．さらに，$m_0(\xi')\overline{\ell(\xi')} + m_0(\xi'+\pi)\overline{\ell(\xi'+\pi)} \in L^2(2\mathbf{T})$ であって，$n(2\xi')$ は $L^2(2\mathbf{T})$ の任意の元であることに注意すると，(19) は $L^2(2\mathbf{T})$ の意味で，$m_0(\xi')\overline{\ell(\xi')} + m_0(\xi'+\pi)\overline{\ell(\xi'+\pi)} \equiv 0$ が成り立つことと同値である．□

補題 **7** 関数 $f, g \in L^2(\mathbf{R})$ に対し，$\{f(x-k)\}_{k\in\mathbf{Z}}$ と $\{g(x-k)\}_{k\in\mathbf{Z}}$ のそれぞれが正規直交系であるとする．さらに，$\mathcal{V}_j := \overline{\mathrm{Span}}\,\{f_{jk}\}_{k\in\mathbf{Z}}$，$\mathcal{W}_j := \overline{\mathrm{Span}}\,\{g_{jk}\}_{k\in\mathbf{Z}}$ とおくとき，$\mathcal{V}_0 \subset \mathcal{V}_1$ を満たし，$g \in \mathcal{V}_0^{\perp}$ であるとする．このとき，$\mathcal{W}_0 = \mathcal{V}_0^{\perp}$ が成り立つ．

証明 $\mathcal{W}_0 \subset \mathcal{V}_0^{\perp}$ は明らかである．補題 2 により，任意の関数 $h \in \mathcal{V}_0^{\perp}$ に対し，ある関数 $\ell(\xi/2) \in \widetilde{\mathcal{V}}_0^{\perp}$ があって，$\widehat{h}(\xi) = \ell(\xi/2)\widehat{f}(\xi/2)$ が成り立つ．$\mathcal{V}_0 \subset \mathcal{V}_1$ だから (14) を満たす $m_1(\xi) \in L^2(\mathbf{T})$ が存在する．$m_1, \ell \in \widetilde{\mathcal{V}}_0^{\perp}$ だから (18) より，$\big(m_1(\xi), m_1(\xi+\pi)\big)$ と $\big(\ell(\xi), \ell(\xi+\pi)\big)$ は平行，つまり，ある関数 $n(\xi)$ があって，$\ell(\xi) = n(\xi)m_1(\xi)$ かつ $\ell(\xi+\pi) = n(\xi)m_1(\xi+\pi)$ が成り立つ．これより，$n(\xi)$ は周期 π の関数であるとしてよい．(15) を使って，$||\ell||_{L^2(\mathbf{T})} = ||n||_{L^2(2\mathbf{T})}$ が示せるので，$n(\xi) \in L^2(\mathbf{T})$ である．よって，$n(\xi) = \sum_{k\in\mathbf{Z}} a_k\, e^{-2ik\xi} \in L^2(2\mathbf{T})$ とかけることがわかる．

$$\begin{aligned} h(x) &= \mathcal{F}^{-1}\big[n(\xi/2)m_1(\xi/2)\widehat{f}(\xi/2)\big] \\ &= \textstyle\sum_{k\in\mathbf{Z}} a_k\mathcal{F}^{-1}\big[\widehat{g}(\xi)\,e^{-ik\xi}\big] \;=\; \sum_{k\in\mathbf{Z}} a_k g(x-k) \in \mathcal{W}_0 \end{aligned}$$

したがって，$\mathcal{V}_0^{\perp} \subset \mathcal{W}_0$ が成り立つ．□

補題 7 の証明から，$\mathcal{V}_0^\perp$ がただひとつの関数 g の整数の平行移動だけで表現できる理由を関係式 (18) によって定義される $\mathbf{C}^2$ の部分ベクトル空間（原点を通る直線）：$\{(z,w)\in\mathbf{C}^2;\ m_0(\xi)z+m_0(\xi+\pi)w=0\}$ の次元（1 次元）にあるとみることができる．このような考え方は多次元ウェーブレットに有効である．n 次元ウェーブレットは 2^n-1 個のウェーブレット関数を必要とすることが知られている．たとえば [23] をみよ．

補題 8 $\{f(x-k)\}_{k\in\mathbf{Z}}\cup\{g(x-k')\}_{k'\in\mathbf{Z}}$ が正規直交系になるのは，

$$\sum\nolimits_{k\in\mathbf{Z}}|\widehat{f}(\xi+2\pi k)|^2\equiv\sum\nolimits_{k\in\mathbf{Z}}|\widehat{g}(\xi+2\pi k)|^2\equiv 1 \tag{20}$$

$$\sum\nolimits_{k\in\mathbf{Z}}\widehat{f}(\xi+2\pi k)\overline{\widehat{g}(\xi+2\pi k)}\equiv 0 \tag{21}$$

が成り立つとき，かつそのときに限る．

証明 補題 1 によれば，$\{f(x-k)\}_{k\in\mathbf{Z}}$ と $\{g(x-k')\}_{k'\in\mathbf{Z}}$ のそれぞれが正規直交系になる条件は，(20) である．そこで，$f(x-\ell)$，$\ell\in\mathbf{Z}$ と $g(x)$ の直交性と同値な条件を調べよう．$H(\xi):=\sum_{k\in\mathbf{Z}}\widehat{f}(\xi+2\pi k)\overline{\widehat{g}(\xi+2\pi k)}$ とおく．$H(\xi)\in L^1(\mathbf{T})$ よりそのフーリエ級数は超関数 $\mathcal{D}'(\mathbf{T})$ の意味で，$H(\xi)=\sum_{\ell\in\mathbf{Z}}\widehat{H}(\ell)\,e^{i\ell\xi}$ とかけて，

$$\widehat{H}(\ell)=\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbf{R}}e^{-i\xi\ell}\,\widehat{f}(\xi)\overline{\widehat{g}(\xi)}\,d\xi=\int_{\mathbf{R}}f(x-\ell)\overline{g(x)}\,dx$$

であることに注意すれば補題 1 と同様に求める条件は (21) であることがわかる．□

補題 9 $\{f(x-k)\}_{k\in\mathbf{Z}}$ が正規直交系であって，$\mathcal{V}_0\subset\mathcal{V}_1$ を満たし，$g\in\mathcal{V}_0^\perp$ とする．このとき，$\{f(x-k)\}_{k\in\mathbf{Z}}\cup\{g(x-k')\}_{k'\in\mathbf{Z}}$ が正規直交系になる条件は，行列

$$M(\xi):=\begin{pmatrix} m_0(\xi) & m_1(\xi)\\ m_0(\xi+\pi) & m_1(\xi+\pi)\end{pmatrix}$$

がすべての（ほとんどいたるところの）ξ に対し，ユニタリ行列になることである．

証明 (14) と (16) を (21) に代入してみよう．k が偶数のときと奇数のときの和にわけて，m_0 と m_1 が周期 2π の周期関数であることに注意すると，

$$\begin{aligned}
&\sum\nolimits_{k\in\mathbf{Z}}m_0(\xi/2+\pi k)\widehat{f}(\xi/2+\pi k)\overline{m_1(\xi/2+\pi k)\widehat{f}(\xi/2+\pi k)}\\
=\ &\sum\nolimits_{k'\in\mathbf{Z}}m_0(\xi/2+2\pi k')\overline{m_1(\xi/2+2\pi k')}\,|\widehat{f}(\xi/2+2\pi k')|^2\\
&+\sum\nolimits_{k''\in\mathbf{Z}}m_0(\xi/2+\pi+2\pi k'')\overline{m_1(\xi/2+\pi+2\pi k'')}\\
&\qquad\times|\widehat{f}(\xi/2+\pi+2\pi k'')|^2\\
=\ &m_0(\xi/2)\overline{m_1(\xi/2)}\sum\nolimits_{k'\in\mathbf{Z}}|\widehat{f}(\xi/2+2\pi k')|^2\\
&+m_0(\xi/2+\pi)\overline{m_1(\xi/2+\pi)}\sum\nolimits_{k''\in\mathbf{Z}}|\widehat{f}(\xi/2+\pi+2\pi k'')|^2
\end{aligned}$$

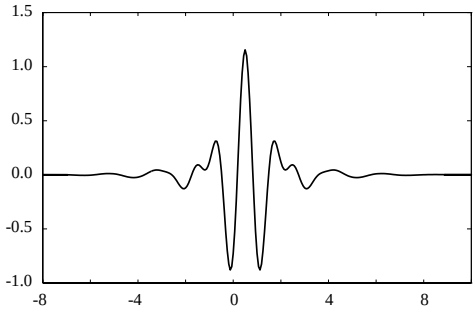


Figure 7: メイエのウェーブレット

となるから (20) を使うと，

$$m_0(\xi/2)\overline{m_1(\xi/2)} + m_0(\xi/2+\pi)\overline{m_1(\xi/2+\pi)} \equiv 0$$

を得る．この式と (15) と (17) は行列 $M(\xi)$ がすべての ξ に対し，ユニタリ行列になることを意味する．逆も，仮定から (20) と (21) とが成り立つので明らかであろう．□

メイエのウェーブレットの構成法を述べよう．

定理 2 (メイエのウェーブレット) 関数 φ は条件 1 を満たすとする．このとき，

$$\psi(x) = \mathcal{F}^{-1}\left[e^{-i\xi/2}\,\overline{m_0(\xi/2+\pi)}\,\widehat{\varphi}(\xi/2)\right] \tag{22}$$

はウェーブレットである．

証明 残された問題は $m_1(\xi)$ を行列 $M(\xi)$ がすべての ξ に対し，ユニタリ行列になるように選ぶことであるが，たとえば，$m_1(\xi) := e^{-i\xi}\,\overline{m_0(\xi+\pi)}$ とすればよい．このとき，$m_1 \in C^\infty(\mathbf{T})$ であるから，$\widehat{\varphi} \in \mathcal{S}(\mathbf{R})$ に注意すると，$\widehat{\psi} \in \mathcal{S}(\mathbf{R})$ したがって，$\psi \in \mathcal{S}(\mathbf{R}) \subset L^2(\mathbf{R})$ となる．補題 4 より，$V_0 \subset V_1$ であり，$f = \varphi$ とおき，補題 6 を使えば，(22) から $\psi \in V_0^\perp$ である．$g = \psi$ とおき，補題 9 を使えば，$\{\varphi(x-k)\}_{k\in\mathbf{Z}} \cup \{\psi(x-k')\}_{k'\in\mathbf{Z}}$ が正規直交系になって，補題 7 より $V_1 = V_0 \oplus W_0$，したがって $V_{j+1} = V_j \oplus W_j$ となる．補題 3 を使って，$\cup_{j\in\mathbf{Z}} V_j = \oplus_{j\in\mathbf{Z}} W_j$ となることに注意すると，$\{\psi_{jk}\}_{j,k\in\mathbf{Z}}$ は $L^2(\mathbf{R})$ の正規直交基底となる．□

メイエのウェーブレット $\psi(x)$ のグラフの概形は Figure 7 ようになる．対称軸が $x = 1/2$ であって，台は無限に広がっているが非常に速く減衰しており，積分すると正の部分と負の部分の面積が等しくなるように振動していることに注意しよう．

関数 $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbf{R})$ に対し，$V_j := \overline{\mathrm{Span}}\,\{\varphi_{jk}\}_{k\in\mathbf{Z}}$ とおく．この構成法からわかることは，関数 $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbf{R})$ を

(i) $\sum_{k\in\mathbf{Z}} |\widehat{\varphi}(\xi+2\pi k)|^2 \equiv 1$

(ii) $\cap_{j\in\mathbf{Z}} V_j = \{0\}$

(iii) $\overline{\cup_{j\in\mathbf{Z}} V_j} = L^2(\mathbf{R})$

(iv) $V_j \subset V_{j+1}$

を満たすように構成できれば，ψ は上に述べたような一般的方法で構成できるということである．この一般的な構成はマラー（Mallat）の**多重解像度解析の方法**とよばれる．

付　録

A　MATLAB ウェーブレットツールボックス

ウェーブレットツールボックス（Wavelet Toolbox）は MATLAB の数値計算とグラフィックスの機能を拡張し，局所的な解析，多重スケール解析，あるいは非定常現象の解析に適したウェーブレット解析の数々の手法を包括的に提供するツールボックスである．

このツールボックスの特徴は分析，合成，雑音除去，信号や画像の圧縮などのための完全なグラフィカルユーザインタフェースとコマンドラインから使うことができる関数を豊富にもつことである．特にグラフィカルユーザインタフェースの完成度は高く，多重スケールで信号解析ができる連続ウェーブレット変換，1 次元および 2 次元の離散ウェーブレット変換，信号や画像を解析する多重解像度分解，1 次元および 2 次元のウェーブレットパケット展開，ウェーブレットパケットにおけるエントロピーにもとづく最適基底や最適レベル，各種の閾値による雑音除去などのウェーブレット解析をすべて対話的に行うことが可能である．コマンドラインからウェーブレット解析を行う必要はほとんどないであろう．

A.1　1 次元サンプルデータの作成

このツールボックスには幾つかのサンプルデータが用意されているが，ここでは解析するサンプルデータを準備しよう．

```
x = 0:4; y = zeros(1,5); y(3) = 2; t = linspace(0,4,2^9);
sample = interp1(x,y,t)';
```

さらに `save sample sample` によりディスクに変数 `sample` を保存しておく．次に `wnoise` を使って Quadchirp と呼ばれる振動数がしだいに高くなる雑音を付加したサンプルデータを作ろう．

```
noise = wnoise(5,9); nsample = sample+0.1*noise;
```

さらに `save nsample nsample` によりディスクに変数 `nsample` を保存しておく．どのようなデータか知りたければ `plot([sample; nsample]')` とすればよい．Figure 8 が得られる．

A.2　コマンドラインからの連続ウェーブレット解析

`help waveinfo` により使えるウェーブレット関数を確認する．たとえば，ドベシィのウェーブレットを使うことにし，`waveinfo('db')` で詳しい説明を読むと `db1 or haar, db4, db15` などというウェーブレットを指定する文字列 `'wname'` が与えられ

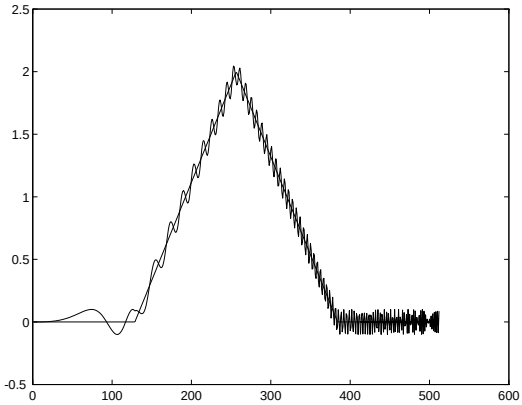


Figure 8: 2 つのサンプルデータの比較

ていることがわかる．1 次元連続ウェーブレット変換の関数はコマンドと関数のリストによれば `cwt` であるから，`help cwt` で説明を読むとベクトルのデータ列 `S`，スケールベクトル `SCALES`，ウェーブレットを指定する文字列 `'wname'` に対し，`COEFS = CWT(S,SCALES,'wname','plot')` により 1 次元連続ウェーブレット変換の係数を計算し，図示することがわかる．例として，`c = CWT(s,[3 18 12.9 7 1.5],'db2')` などがある．サンプルデータ `sample` がワークスペースになければ `load sample` でディスクから読み込む．そして

```
c = cwt(sample,1:32,'db3','plot');
```

を実行してみる．Figure 9 が得られる． サンプルデータ `sample` の第 1 次導関数の不連続点が係数に反映されていることがわかる．得られた係数は `save coef c` によりディスクに変数 `c` を `coef` というファイル名で保存しておくことができる．

A.3 コマンドラインからの離散ウェーブレット解析

1 次元離散ウェーブレット変換の関数はコマンドと関数のリストによれば

分析・分解	合成・再構成	分解構造の制御	雑音除去・圧縮
dwt	idwt	detcoef	ddencmp
wavedec	waverec	appcoef	wdencmp
	wrcoef	upwlev	wden
	upcoef		

プロンプトで `load nsample` とタイプし，サンプルデータ `nsample` をディスクから読み込む．ドベシィの $N = 3$ のウェーブレットを使うことにする．レベル 1 の 1 次元離散ウェーブレット変換係数を計算するには

```
[cA1,cD1] = dwt(nsample,'db3');
```

である．この係数からレベル 1 の近似（approximation）を構成するには

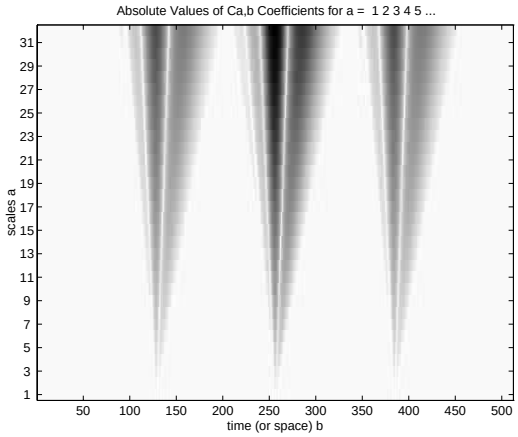


Figure 9: サンプルデータの連続ウェーブレット変換

```
ls = length(nsample); A1 = upcoef('a',cA1,'db3',1,ls);
```

詳細（detail）を構成するには

```
D1 = upcoef('d',cD1,'db3',1,ls);
```

である．この結果を図示するには

```
subplot(1,2,1); plot(A1); subplot(1,2,2); plot(D1);
```

とする．Figure 10 が得られる． 1 次元逆離散ウェーブレット変換は

```
A0 = idwt(cA1,cD1,'db3',ls);
```

である．レベル 3 まで 1 次元ウェーブレット分解を計算するには

```
[C,L] = wavedec(nsample,3,'db3');
```

である．レベル 3 の近似係数は

```
cA3 = appcoef(C,L,'db3',3);
```

レベル 3 からレベル 1 まで詳細係数は

```
cD3 = detcoef(C,L,3); cD2 = detcoef(C,L,2); cD1 = detcoef(C,L,1);
```

である．レベル 3 の近似を構成するには

```
A3 = wrcoef('a',C,L,'db3',3);
```

レベル 1 からレベル 3 までの詳細を構成するには

```
D1 = wrcoef('d',C,L,'db3',1); D2 = wrcoef('d',C,L,'db3',2);
D3 = wrcoef('d',C,L,'db3',3);
```

である．この結果を図示するには

```
subplot(2,2,1); plot(A3); subplot(2,2,2); plot(D1);
subplot(2,2,3); plot(D2); subplot(2,2,4); plot(D3);
```

とする．Figure 11 が得られる． 付加した雑音 `noise = wnoise(5,9)` は Quadchirp と呼ばれる振動数がしだいに高くなる雑音である．レベル 3 の分解によりレベルが高くなるに従ってしだいに低周波部分が分離されているのがわかる．レベル 3 の分解から元の信号を再構成するには

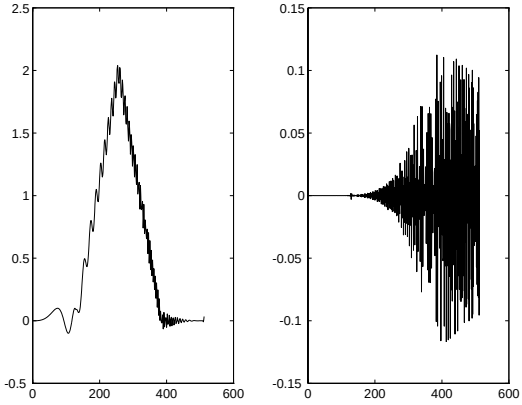


Figure 10: 雑音を付加したサンプルデータの近似と詳細のグラフ

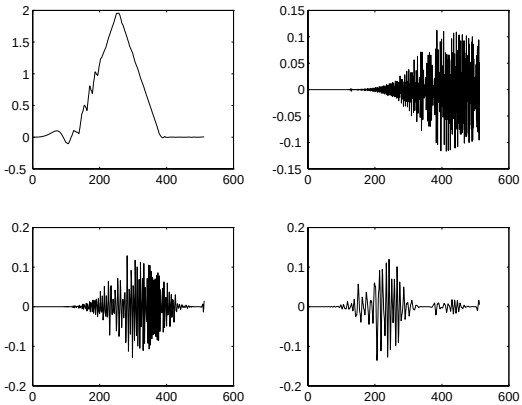


Figure 11: 雑音を付加したサンプルデータのレベル 3 の分解のグラフ

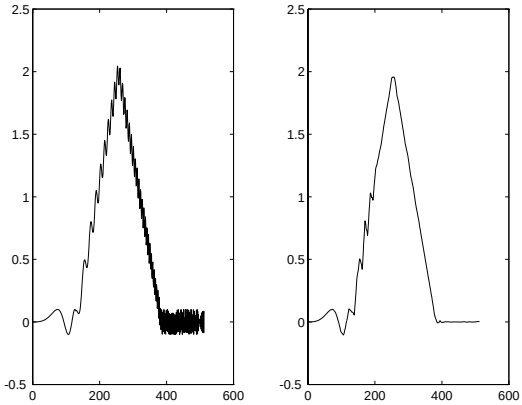


Figure 12: 元の信号とレベル 3 の分解の近似の比較

```
A0 = waverec(C,L,'db3');
```

である．元の信号とレベル 3 の分解の近似を比較するには

```
subplot(1,2,1); plot(nsample); v = axis;
subplot(1,2,2); plot(A3); axis(v);
```

とする．Figure 12 が得られる． 一般に詳細を捨てることにより信号から高周波の雑音を除去することができて，除去した結果の信号が近似として与えられることがわかる．

関数 `ddencmp` により閾値を与えてより細かい雑音除去ができる．正数 `t` を閾値とするとき，hard thresholding は信号 `x` が `abs(x) <= t` を満たす成分は `0` とし，soft thresholding は信号 `x` が `abs(x) <= t` を満たす成分は `0` とし，かつ `abs(x) > t` を満たす成分は `sign(x).*(abs(x)-t)` とする．詳しい使い方は `help ddencmp` によりオンラインヘルプを参照すればよい．

B ウェーブレットインターネットリソース

B.1 ウェーブレットチュートリアル

ウェーブレットについての基本的な事柄を説明しているホームページを紹介しよう．これらのホームページではいろいろな画像を使って説明しているためウェーブレットを直感的に理解しやすい．WWW の真価が発揮されているといえる．

▷ Summus 社の WAVELET TECHNOLOGY のホームページ
`http://www.summus.com/`

Summus 社はウェーブレットによる画像圧縮のソフトウェアを開発販売している．このホームページでは画像圧縮方法を比較してデモンストレーションしている．Wavelet Thoery というページではフーリエ解析を簡単に説明した後，ウェーブレット解析による画像圧縮について実例を挙げて説明しているので一見の価値はある．画像が美しい．

▷ S. Santini の “Why Wavelets” Explanations のホームページ
`http://www-cse.ucsd.edu/users/ssantini/cse228f/wavelet/wavelet.htm`

ウェーブレットの美しさやウェーブレットがなぜ画像圧縮に適しているかをスライドをつかって説明している．スライドはよくできており，WWW を通して講演を見ているような気がする．

▷ Robi Polikar の The Engineer’s Ultimate Guide to Wavelet Analysis のホームページ
`http://www.public.iastate.edu/~rpolikar/WAVELETS/WTtutorial.html`

ウェーブレット変換を中心にウェーブレット理論をエンジニア向きに本格的にまとめてあり，グラフィックスもわかりやすい．

B.2 ウェーブレットダイジェスト

ウェーブレットダイジェストは1992 年の 7 月に Björn Jawerth と Wim Sweldens によって始められた電子メールを使って配布される無料の電子雑誌（メールリスト）である．ウェーブレットダイジェストは約 1 カ月ごとに定期的に配布され，会議の公告や本，プレプリント，ソフトウェアや質問などウェーブレットに関するあらゆる種類の情報を含んでいる．ウェーブレットダイジェストを購読するのは簡単で，本文には何も書かずに電子メールを `add@wavelet.org` 宛に送信するだけである．電子メールの処理は自動的に行われ，電子メールを送信した住所がメールリストに加えられ，購読の承認とバックナンバーが電子メールで送られてくる．また，

▷ `http://www.wavelet.org/`

に接続して購読の申し込みや WWW でウェーブレットダイジェストを読むこともできる．WWW で読む場合にはリンクがあるので，バックナンバーを参照したり，プレプリントをダウンロードしたりするときは便利である．ウェーブレットダイジェストのホームページには，ウェーブレットに関する行事予定（Calendar of Events），ウェーブレットダイジェストに関する説明（Detailed help information），バックナンバーへのリンク（Back Issues in HTML format），ウェーブレットダイジェスト内のキーワードサーチ（Keyword Search），著者の紹介（Wavelet Digest Team），ウェーブレット関係のホームページへのリンク（Links to other Wavelet sites）などのサービスが提供されている．ウェーブレットダイジェストに投稿する場合や購読を中止する場合には Detailed help information を読む必要があろう．

B.3 ウェーブレットサイト

ウェーブレットに関する多くのサイトへのリンクを集めているホームページをふたつ紹介しよう．いずれもほとんどコメントがないがいろいろなホームページを見るときは便利である．

▷ ザルツブルグ大学数学教室の Wavelet のホームページ
`http://www.mat.sbg.ac.at/~uhl/wav.html`

Internet Sources（WWW-Server, Gopher-Server, FTP-Server）と Bibtex Bibliographies からなる．

▷ ワシントン大学セントルイス校の Wavelet NetCare のホームページ
`http://www.artsci.wustl.edu/~xihua/html/WaveletNetCare.html`

WWW-Server, FTP-Server, Bibliography からなる．

B.4 ウェーブレットプレプリント

ウェーブレット関係のプレプリントのリンクを集めたホームページはいくつもあるがその中からふたつ紹介しよう．

▷ MathSoft 社の Wavelet Resources のホームページ
`http://www.mathsoft.com/wavelets.html`

MathSoft 社は S+Wavelets という信号および画像処理のソフトを開発し販売している会社である．Wavelet Resources のホームページは，ウェーブレットダイジェストに投稿された論文等のプレプリントへのリンクだけでなく，世界中の数学，工学，物理学にわたって幅広くウェーブレットとその応用に関するプレプリントのリンクを集めたリストである．このリストは，Introductions to Wavelets, General Theory, M-Band Wavelets and Filter Banks, Wavelets and General Signal Processing, Wavelets and Image Processing, Wavelets and Partial Differential Equations, Wavelets and Statistics, Wavelets and Physics（一部抜粋）等の項目に分類されていて，欲しいプレプリントがあればリンクをクリックするだけでよい．通常は FTP で接続されて自動的に目的のファイルがダウンロードできる．リンク先が知りたければ，Netscape の場合はホームページをテキストファイルあるいはソースファイルとして保存できるから，ソースファイルとして保存すれば，HTML も込めて保存できる．

もうひとつはウェーブレットに関する論文等のプレプリントがキーワードで検索できるホームページを紹介しよう．

▷ University of Karlsruhe の Bibliographies on Wavelets のホームページ
`http://liinwww.ira.uka.de/bibliography/Theory/Wavelets/`

B.5 ウェーブレット参考文献

参考文献のテキストファイルを提供しているホームページもある．

▷ ザルツブルグ大学数学教室の Wavelet の My own Bibliography のホームページ
`http://www.mat.sbg.ac.at/~uhl/wavelet.bib`

▷ サウスカロライナ大学数学教室の THE WAVELET DIGEST の LISTS OF REFERENCES のホームページ
`http://www.math.sc.edu/~wavelet/References.html`

たとえば，LISTS OF REFERENCES のホームページからは

▷ テキサス A&M 大学の Steve Baum による `baum.bib`
BiBTeX format, 200 entries, last update December 1994.

▷ アムステルダム大学の Tom Koornwinder による `koornwinder.ref`
Ascii format, 300 entries, last update October 1992.

等のテキストファイルがダウンロードでき自由に使えるが著者に対する謝辞を忘れてはならない．`baum.bib` は BibTeX 用のテキストファイルである．また，`koornwinder.ref` は単なるテキストファイルであり，BibTeX を使わないときにはこちらが便利であろう．

B.6 ウェーブレットソフトウェア

ウェーブレットのソフトウェアに関するホームページは数多い．フリーウェアやシェアウェアなどを提供するホームページと販売されているソフトウェアに関する情報を提供するホームページとに大別できる．これらに関する情報は

▷ Amara Graps の Amara's Wavelet Page のホームページ
`http://www.amara.com/current/wavelet.html`

に適切なコメントとともに紹介されている．他にも多くのウェーブレットのソフトを紹介するホームページがあるが，ここではウェーブレットに限らず数学全般にわたってソフトのリンクを集めているホームページをひとつだけ挙げておこう．

▷ サウスカロライナ大学数学教室の Mathematics Information Servers のホームページ
`http://www.math.psu.edu/MathLists/Contents.html`

次に著者が実際に使ってみたソフトウェアについてのホームページをいくつか紹介しよう．

▷ スタンフォード大学の WaveLab
`http://playfair.stanford.edu/~wavelab`

WaveLab は David Donoho らスタンフォード大学のメンバー等により MATLAB を使って書かれており，900 を越える MATLAB のファイルからなるフリーウェアであるがレジストレーションが必要である．もちろん MATLAB がなければ使えない．Macintosh，UNIX そして Windows 用のファイルが提供されている．ウェーブレット解析やウェーブレットパケット解析などをカバーするが，とりわけ David Donoho らによって提唱された wavelet shrinkage の部分は圧巻である．

▷ The MathWorks の The MATLAB Wavelet Toolbox
`http://www.mathworks.com/wavelet.html`

MATLAB は The MathWorks 社が開発し販売している Macintosh，UNIX そして Windows 上で動く，行列の数値計算とグラフィックスが簡単にできるソフトウェアであり，The MATLAB Wavelet Toolbox は MATLAB を使ってプログラムされた Toolbox とよばれる拡張パッケージのひとつである．したがって MATLAB がなければ使えない．1 次元と 2 次元の各種のウェーブレット解析をカバーし，グラフィックスの完成度には目を見張るものがある．テキストファイルのプログラムソースは容易に書き換えることができる．しかも最も基本的な部分はバイナリで書かれているので計算速度は速い．The MathWorks のホームページではこれらのソフトウェアに関する情報が得られる．

▷ Jack Cohen の Mathematica wavelet programs
`http://www.cwp.mines.edu/software.html`

Jack Cohen は Mathematica を使っていくつかの教育的プログラムを作っており，Mathematica wavelet programs はその中のひとつである．プログラムと共にノートブックとよばれる Mathematica の文書でメイエやドベシィのウェーブレットあるいはマルバールのウェーブレットなどを丁寧に解説している．このようなノートブックを早い時期から無料で提供していることに敬意を表したい．Mathematica がなければプログラムを実行することはできないが，Wolfram Research 社が提供しているフリーソフトの MathReader を使えば，ノートブックを読むことはできる．

▷ Wolfram Research の Wavelet Explorer
`http://www.wolfram.com/mathematica/applications`

Mathematica は Wolfram Research 社が開発し販売している Macintosh，UNIX そして Windows 上で動く，数式処理とグラフィックスが簡単にできるソフトウェアであり，Wavelet Explorer は Mathematica を使ってプログラムされた applications とよばれる拡張パッケージのひとつである．したがって Mathematica がなければ使えない．1 次元と 2 次元の各種のウェーブレット解析をカバーし，すべてのプログラムソースはテキストファイルであり容易に理解でき，書き換えることができる．Wolfram Research のホームページではこれらのソフトウェアに関する情報が得られる．

▷ Digital Diagnostics Corporation とエール大学の Wavelet Packet Laboratory for Windows
`http://www.portal.com/~rww/dir_akp/akp_wavtop.html`

Wavelet Packet Laboratory for Windows はその名の通り Windows 上で動くウェーブレットパケット解析などの時間周波数解析をサポートするパッケージである．マニュアルは簡潔にまとめられていて数学的にもよく書けている．早くからリリースされていて，価格も MATLAB や Mathematica に比べ低く手頃であるが，プログラムはバイナリであるため書き換えることはできない．

▷ Darryl Spencer の Wavelet
`ftp://ftp.iij.ad.jp/pub/info-mac/_Graphic_%26_Sound_Tool/grf/wavelet.hqx`

Wavelet は Macintosh 用のフリーウェアであり，画像の圧縮率を簡単な操作で変えることができて，ウェーブレットを使った画像圧縮の効果を目で見ることができる．

▷ Intergalactic Reality の MacWavelets
`http://www.intergalact.com/macwavelets/macwavelets.html`

MacWavelets v1.00 は Macintosh 用のフリーウェアであったが，MacWavelets v2.00 は 2 次元の画像処理をサポートしてシェアウェアとなった．Macintosh 用アプリケーションのため簡単に操作でき，プログラム等の知識を必要としない．MATLAB 等の他のアプリケーションを必要とせず単独で動き，ウェーブレットのことを理解する入門ソフトとしてはシェアウェア料金以上の働きをするといえる．

B.7 ウェーブレットホームページアラカルト

▷ Christopher Brislawn の The FBI Fingerprint Image Compression Standard のホームページ
`http://www.c3.lanl.gov/~brislawn/FBI/FBI.html`

このホームページでは FBI（Federal Bureau of Investigation）で使われている指紋をデジタル信号に符号化するアルゴリズム Wavelet/Scalar Quantization (WSQ) について実例を挙げて説明している．応用上何が問題になるのかがよくわかる．

▷ Jelena Kovacevic の Welcome to my home page! のホームページ
`http://cm.bell-labs.com/cm/ms/who/jelena/index.html`

彼女らの本 Wavelets and Subband Coding の紹介やいろいろな Wavelet groups へリンクするホームページ：Links to other wavelet/multirate sites がある．

▷ Jo Yew の Welcome to Jo Yew's Paradise のホームページ
`http://www.cadcam.nus.sg/~ele22091/Proj.html`

Others' Home Pages on Wavelets Related Stuffs! では Ingrid Daubechies や Gilbert Strang 等のホームページへのリンクがある．

▷ Roberto M. Cesar Jr. の Multiscale Shape Representation and Description のホームページ
`http://www.ifqsc.sc.usp.br/ifsc/ffi/grupos/instrum/visao/projects/shapes/pinda/shapes.htm`

連続ウェーブレット変換をコンピュータビジョンやパターン認識などに応用するいくつかの試みについて説明している．

▷ Publishers' Catalogs Home Page のホームページ
`http://www.lights.com/publisher/`

いろいろな国の多くの出版社のホームページへのリンクがあり参考文献の単行本などの内容等をチェックするのに便利である．

C　ウェーブレットの教科書について

和書のウェーブレットの教科書で現在出版されているものは [3]，[4]，[5]，[6]，[9] の 5 つである．[3] は Mathematica を使ったウェーブレット変換のプログラムと工学への応用がまとめられていて，フロッピーディスクが付属する．[4] は非常に手際良くまとめられていて，数学的には [5] より基本的で付属の CD-ROM にオリジナルの Mathematica のプログラムが収められていて良くできている．とくにドベシィのウェーブレットとスプラインウェーブレットに詳しい．[5] は原本が非常に優れた入門書であるため，最も優れた和書の入門書であるといえる．とくにスプラインウェーブレットに詳しく数学のレベルも高い．[6] は理論と応用がいろいろな図を使って説明されていて，とくに工学への応用が詳しい．[9] は原本が複数の著者で執筆された専門書であり，唯一の和書の専門書であるといえる．

洋書のウェーブレットの教科書のうち最も評判の高いものを 2 つ挙げると，[14] と [23] である．[23] は 3 巻からなる仏語原本の第 1 巻の英訳である．[14] は非常によく書けており，ほとんどの人が使っている教科書であると思われる．[23] は数学のレベルが非常に高い専門書である．ウェーブレットを紹介する本として [24] があり，いろいろな分野の人々を対象にした講義がもとになっているので，数学的証明がほとんど載ってない．これも仏語版からの英訳である．最近出版された中で [19] はウェーブレット変換に焦点をあてて，フラクタルなど広範囲をカバーした数学の専門書である．[13] はコーエンの仏語版の本がもとになっていてフィルタとウェーブレットの関係が良くわかる簡潔な本である．[29] はフーリエ解析などの実解析の素養があれば数学的にすっきりしていて非常に読みやすい．[27] はフィルタバンクとウェーブレットの関係が詳しく書かれており，多くの練習問題と巻末に MATLAB の Wavelet Toolbox を使って解く練習問題が載っていて読みごたえのある教科書を意識して書かれた本である．[30] は C 言語で書かれたプログラムソースが載っていて，ウェーブレットパケットや最適基底アルゴリズムに詳しい．[21] は数学者の妻でフリーライターの著者が，多くの人々にインタビューして，ウェーブレットがどのようにつられてきたかを数学を知らない人達にもわかるようにリアリティあふれる文章で紹介した非常に面白い本である．以上の他に幾つも出版されていて，どれも特徴を持っている．

References

[1] 芦野隆一・山本鎭男，『ウェーブレット解析 − 誕生・発展・応用 −』，共立出版，1997.

[2] 芦野隆一・Rémi Vaillancourt，『はやわかり MATLAB』，共立出版，1997.

[3] 斎藤兆古，『Mathematica によるウェーブレット変換』，朝倉書店，1996

[4] 榊原進，『ウェーヴレットビギナーズガイド』，東京電機大学出版局，1995

[5] 桜井他訳　チューイ，『ウェーブレット入門』，東京電機大学出版局，1993

[6] 袋谷賢吉訳　ヤング，『ウェーブレット　信号処理とシステム推定への応用』，トッパン，1997

[7] 溝畑茂，『偏微分方程式論』，岩波書店，1965

[8] 溝畑茂，『ルベーグ積分』，岩波書店，1966

[9] 山口昌哉・山田道夫監訳　ベネッデット他編，『ウェーブレット　理論と応用』，シュプリンガー・フェアラーク東京，1995

[10] WIDE Project 編，*bit* 別冊　インターネット参加の手引き 1996 年版，共立出版，1996

[11] Applebaum, *Probability and Information An intergrated approach*, Cambridge University Press, 1996

[12] Beals, *Advanced Mathematical Analysis*, GTM12, Springer-Verlag, 1973

[13] Cohen and Ryan, *Wavelets and Multiscale Signal Processing*, Chapman & Hall, 1995

[14] Daubechies, *Ten Lectures on Wavelets*, SIAM, 1992

[15] Daubechies (ed.), *Different Perspectives on Wavelets*, Proc. Sympos. Appl. Math., Vol. 47, AMS, 1993

[16] David, *Wavelets and Singular Integrals on Curves and Surfaes*, Lecture Notes Math. 1465, Springer-Verlag, 1991

[17] Folland, *Introduction to Partial Differential Equations*, 2nd ed., Princeton, 1995

[18] Gasquet and Witomski, *Analyse de Fourier et Applications: Filtrage, Calcul numérique, Ondelettes*, Masson, 1990

[19] Holschneider, *Wavelets: An Analysis Tool*, Oxford, 1995

[20] Hörmander, *The Analysis of Linear Partial Differential Operators*, Vol.1, Springer-Verlag, 1983

[21] Hubbard, *The World According to Wavelets*, A K Peters, 1996

[22] Kahane and Lemarié-Rieusset, *Fourier Series and Wavelets*, Gordon and Breach Publisers, 1995

[23] Meyer, *Wavelets and Operators*, Cambridge University Press, 1992

[24] Meyer, *Wavelets: Algorithms and Applications*, SIAM, 1993

[25] Newland, *An Intorduction to Random Vibrations, Spectral and Wavelet Analysis*, 3rd ed., Addison Wesley Longman, 1993

[26] Papoulis, *Signal Analysis*, McGraw-Hill, 1977

[27] Strang and Nguyen, *Wavelets and Filter Banks*, Wellesley-Cambridge Press, 1996

[28] Vaidyanathan, *Multirate Systems and Filter Banks*, Prentice-Hall, 1992

[29] Walter, *Wavelets and Other Orthogonal Systems with Applications*, CRC-Press, 1994

[30] Wickerhauser, *Adapted Wavelet Analysis from Theory to Software*, A K Peters, 1994

[31] Zemanian, *Distribution Theory and Transform Analysis*, McGraw-Hill, 1965, (Reprint from Dover, 1987)