Microlocal filtering with wavelets and the sampling theorem

大阪教育大学・数理科学　芦野 隆一 (Ryuichi ASHINO)

1　Introduction

Wavelets have proven to be useful decomposition tools in a wide variety of applications throughout mathematics, science, and engineering. For example, the still-image compression standard known as JPEG2000 includes a wavelet option and the next video compression standard, MPEG-4, will be entirely wavelet based.

Hyperfunctions, which were introduced by Sato and extensively developed by the Kyoto school of mathematics, can be considered to be sums of boundary values of holomorphic functions defined in infinitesimal wedges. Microlocal analysis plays an important role in the theory of hyperfunctions, partial differential operators, and many other areas. In this theory, one can define the product of distributions and discuss the partial regularity of multidimensional distributions with respect to any independent variable.

In this paper, we discuss some particular wavelet frame constructions and related multiresolution analyses which are suited for microlocal filtering taken from [1] and [2]. We also give some numerical experiments. Another statement from [6] asserts that the orthonormal wavelet basis constructed by [3] is a “stepwise” unconditional basis in $L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 < p < \infty$, which corresponds to the $L^p(\mathbb{R}^1)$ convergence of the classical sampling theorem discussed in [10].

2　フレーム

ここではフレームについて概観する．詳しくは [8], [12], [13] を見よ．もともとフレームの理論は Duffin と Schaeffer [9] により，帯域制限信号の不規則サンプリング $\{f(x_n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ からもとの帯域制限信号 f を再構成するために作られた．

可分なヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ の系 $\{\phi_n\}_{n\in\mathbb{J}}$ が $\mathcal{H}$ の**フレーム** であるとは，定数 $A > 0$ と $B > 0$ があって，任意の $f \in \mathcal{H}$ に対して，

$$A\,\|f\|^2 \le \sum_{n\in\mathbb{J}} |\langle f, \phi_n\rangle|^2 \le B\,\|f\|^2$$

が成り立つときをいう．これらの定数 A と B を **フレーム定数**と呼ぶ．フレームは，$A=B$ であるとき**隙間のないフレーム**であるという．フレーム $\{\phi_n\}_{n\in\mathbb{J}}$ に対して，作用素 $L:\mathcal{H}\mapsto\mathcal{H}$ を

$$Lf=\sum_{n\in\mathbb{J}}\langle f,\phi_n\rangle\,\phi_n,\qquad \forall f\in\mathcal{H}$$

で定義し，**フレーム作用素**と呼ぶ．このフレーム作用素 L は H 上の正値で有界な線形作用素であり，有界な逆を持つことが示せる．

2 乗和が有限となる数列のなす空間を

$$\ell^2(\mathbb{J}):=\Big\{x\ :\ \|x\|^2_{\ell^2(\mathbb{J})}:=\sum_{n\in\mathbb{J}}|x[n]|^2<+\infty\Big\}$$

とおき，**分解作用素** $U:\mathcal{H}\mapsto\ell^2(\mathbb{J})$ を

$$Uf[n]=\langle f,\phi_n\rangle,\qquad \forall n\in\mathbb{J}$$

で定義する．分解作用素 U の随伴作用素 U^* を**合成作用素** と呼ぶ．したがって，合成作用素 U^* は

$$U^*x=\sum_{n\in\mathbb{J}}x[n]\,\phi_n,\qquad x\in\ell^2(\mathbb{J})$$

で与えられる．このとき，フレーム作用素 L は $L=U^*U$ と分解できる．ヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ の系 $\{\widetilde{\phi}_n\}_{n\in\mathbb{J}}$ を

$$\widetilde{\phi}_n=L^{-1}\phi_n\ =(U^*U)^{-1}\phi_n$$

で定義すると，この系 $\{\widetilde{\phi}_n\}_{n\in\mathbb{J}}$ はフレーム定数が $1/B,\,1/A$ であるフレームであることがわかり，$\{\phi_n\}_{n\in\mathbb{J}}$ の**双対フレーム**と呼ばれる．このとき，

$$f=L^{-1}(Lf)=L^{-1}\Big(\sum_{n\in\mathbb{J}}\langle f,\phi_n\rangle\,\phi_n\Big)=\sum_{n\in\mathbb{J}}\langle f,\phi_n\rangle\,L^{-1}\phi_n=\sum_{n\in\mathbb{J}}\langle f,\phi_n\rangle\,\widetilde{\phi}_n$$

を得る．また，L^{-1} が自己共役作用素であることに注意すると，

$$f=L(L^{-1}f)=\sum_{n\in\mathbb{J}}\langle (L^{-1}f),\phi_n\rangle\,\phi_n=\sum_{n\in\mathbb{J}}\langle f,L^{-1}\phi_n\rangle\,\phi_n=\sum_{n\in\mathbb{J}}\langle f,\widetilde{\phi}_n\rangle\,\phi_n$$

を得る．

隙間のないフレームの場合，すなわち $A=B$ の場合は，

$$\widetilde{\phi}_n=A^{-1}\,\phi_n$$

となるから，

$$f=\widetilde{U}^{-1}Uf=\frac{1}{A}\sum_{n\in\mathbb{J}}\langle f,\phi_n\rangle\,\phi_n$$

を得る．この場合，ϕ_n を $\phi_n/\sqrt{A}$ で置き換えれば，一般性を失うことなく $A=1$ と仮定できる．特に，フレーム定数が $A=1$ である隙間のないフレームを**パーセヴァルフレーム**と呼ぶこともある．

3　隙間のないウェーブレットフレーム

関数 $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ に対して，平行移動とスケーリングされた関数 f_{jk} を

$$f_{jk}(x) = 2^{nj/2} f(2^j x - k), \qquad j \in \mathbb{Z}, \quad k \in \mathbb{Z}^n \tag{1}$$

で定義する．$\mathbb{L}$ を有限の添字集合とする．

系 $\{\psi_{jk}^\ell\}_{\ell\in\mathbb{L}, j\in\mathbb{Z}, k\in\mathbb{Z}^n} \subset L^2(\mathbb{R}^n)$ が**正規直交ウェーブレット基底**であるとは，系 $\{\psi_{jk}^\ell\}$ が $L^2(\mathbb{R}^n)$ の正規直交基底であるときをいい，系 $\{\psi_{jk}^\ell\}$ がフレーム定数 A を持つ**隙間のないウェーブレットフレーム**であるとは，系 $\{\psi_{jk}^\ell\}$ が

$$f = \frac{1}{A} \sum_{\ell\in\mathbb{L},\ j\in\mathbb{Z},\ k\in\mathbb{Z}^n} \langle f, \psi_{jk}^\ell \rangle \, \psi_{jk}^\ell, \qquad \forall f \in L^2(\mathbb{R}^n) \tag{2}$$

を満たすときをいう．この定義は前に述べた隙間のないフレームの定義と同値である．系 $\{\psi_{jk}^\ell\}$ が正規直交ウェーブレット基底であることと，系 $\{\psi_{jk}^\ell\}$ が，$\|\psi^\ell\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = 1$, $\ell \in \mathbb{L}$ を満たすパーセヴァルウェーブレットフレームであることとは同値である．

次の定理は本質的には [11] で一般の $\mathbb{R}^n$ の場合に述べられ，証明された Theorem 1 であり，$\mathbb{R}^n$ の場合にパーセヴァルウェーブレットフレームであるための必要十分条件を与える．

定理 1 関数 $\psi^\ell \in L^2(\mathbb{R}^n)$, $\ell \in \mathbb{L}$ を考える．このとき，任意の $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ に対して，

$$\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 = \sum_{\ell\in\mathbb{L},\ j\in\mathbb{Z},\ k\in\mathbb{Z}^n} \left|\langle f, \psi_{j,k}^\ell \rangle\right|^2 \tag{3}$$

が成り立つことと，関数の集合 $\{\psi^\ell\}_{\ell\in\mathbb{L}}$ が次の 2 つの条件

$$\sum_{\ell\in\mathbb{L},\ j\in\mathbb{Z}} \left|\widehat{\psi}^\ell(2^j\xi)\right|^2 = 1, \qquad a.e.\, \xi \in \mathbb{R}^n, \tag{4}$$

$$\sum_{\ell\in\mathbb{L},\ j\in\mathbb{Z}_+} \widehat{\psi}^\ell(2^j\xi)\, \overline{\widehat{\psi}^\ell(2^j(\xi + 2\pi q))} = 0, \qquad a.e.\, \xi \in \mathbb{R}^n,\ \forall q \in \mathbb{Z}^n \backslash (2\mathbb{Z})^n \tag{5}$$

を満たすことは同値である．ここで，$\mathbb{Z}_+ := \mathbb{N} \cup \{0\}$ であり，$q \in \mathbb{Z}^n \backslash (2\mathbb{Z})^n$ は少なくとも 1 つの成分 q_j が奇数であることを意味する．

系 1 定理 1 の仮定の下で，任意の関数 $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ は**パーセヴァルウェーブレットフレーム展開**

$$f = \sum_{\ell\in\mathbb{L},\ j\in\mathbb{Z},\ k\in\mathbb{Z}^n} \langle f, \psi_{jk}^\ell \rangle \, \psi_{jk}^\ell \tag{6}$$

を持つ．

フーリエ空間におけるウェーブレットフレームの局在性から，$\widehat{f}(\xi)$ のある方向に関する増大度をフレーム係数

$$\langle f, \psi_{jk}^{\ell} \rangle = (2\pi)^{-n} \langle \widehat{f}, \widehat{\psi}_{jk}^{\ell} \rangle \tag{7}$$

から調べることができる．ここで，関数 f の**フーリエ変換**と関数 g の**逆フーリエ変換**を

$$\mathcal{F}[f](\xi) = \widehat{f}(\xi) := \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\xi} f(x)\,dx, \qquad \mathcal{F}^{-1}[g](x) := (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\xi} g(\xi)\,d\xi$$

で定義する．さらに，x 空間におけるウェーブレットフレームの局在性から，フレーム係数 (7) で ℓ, j, k を動かすことにより関数 $f(x)$ の特異台の位置に関する情報を得ることができる．

4　フレーム多重解像度解析

フレーム多重解像度解析は Benedetto と Li [7] によって導入された．$L^2(\mathbb{R}^n)$ の閉部分空間の列 $\{V_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ が**多重解像度解析**であるとは，次の条件を満たすときをいう．

(i) $V_j \subset V_{j+1}, \quad \forall j \in \mathbb{Z}$;　(ii) $f(\cdot) \in V_j \iff f(2\cdot) \in V_{j+1}, \quad \forall j \in \mathbb{Z}$;

(iii) $\bigcap_{j\in\mathbb{Z}} V_j = \{0\}$;　(iv) $\overline{\bigcup_{j\in\mathbb{Z}} V_j} = L^2(\mathbb{R}^n)$;

(v) ある関数 $\phi \in V_0$ があって，$\{\phi(\cdot - k)\}_{k\in\mathbb{Z}^n}$ は V_0 の正規直交基底である．

条件 (v) に現れる関数 $\phi \in L^2(\mathbb{R}^n)$ を**スケーリング関数**と呼ぶ．$L^2(\mathbb{R}^n)$ の閉部分空間の列 $\{V_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ が**フレーム多重解像度解析**であるとは，条件 (i), (ii), (iii), (iv) そして次の (v-1) を満たすときをいう．

(v-1) ある関数 $\phi \in V_0$ があって，$\{\phi(\cdot - k)\}_{k\in\mathbb{Z}^n}$ は V_0 のフレームである．

条件 (v-1) に現れる関数 $\phi \in L^2(\mathbb{R}^n)$ を**フレームスケーリング関数**と呼ぶ．

D を有限添字集合とする．$L^2(\mathbb{R}^n)$ の閉部分空間の列 $\{V_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ が**マルチウェーブレット多重解像度解析**であるとは，条件 (i), (ii), (iii), (iv) そして次の (v-2) を満たすときをいう．

(v-2) ある関数の系 $\{\phi_\delta\}_{\delta\in D} \subset V_0$ があって，$\{\phi_\delta(\cdot - k)\}_{\delta\in D,\ k\in\mathbb{Z}^n}$ は V_0 の正規直交基底である．

条件 (v-2) に現れる関数 $\{\phi_\delta\}_{\delta\in D}$ を**マルチスケーリング関数**と呼ぶ．$L^2(\mathbb{R}^n)$ の閉部分空間の列 $\{V_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ が**マルチウェーブレットフレーム多重解像度解析**であるとは，条件 (i), (ii), (iii), (iv) そして次の (v-3) を満たすときをいう．

(v-3) ある関数の系 $\{\phi_\delta\}_{\delta\in D} \subset V_0$ があって，$\{\phi_\delta(\cdot - k)\}_{\delta\in D,\ k\in\mathbb{Z}^n}$ は V_0 のフレームである．

条件 (v-3) に現れる関数 $\{\phi_\delta\}_{\delta\in D}$ を**フレームマルチスケーリング関数**と呼ぶ．

5　多次元正規直交超局所フィルタリング

次の記号法を使う．

- $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_n) \in H := \{\pm 1\}^n$.
- $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \in E := \{0, 1\}^n \setminus \{0\}, \quad j \in \mathbb{Z}_+$.
- $Q_\eta := \prod_{k=1}^n [0, \eta_k], \quad \varepsilon.*\eta := (\varepsilon_1\eta_1, \dots, \varepsilon_n\eta_n)$.
- $\mathcal{Q}_{j,\varepsilon,\eta} := \left\{\prod_{k=1}^n [\eta_k(\ell_k - 1), \eta_k\ell_k] + 2^j(\varepsilon.*\eta) \;:\; 1 \le \ell_k \le 2^j,\; \ell_k \in \mathbb{N}\right\}$.
- $\mathbb{Z}_+^{E\times H}$ とは $E \times H$ から $\mathbb{Z}_+$ への写像全体のなす集合.

定理 2 $j \in \mathbb{Z}_+$, $\varepsilon \in E$, $\eta \in H$ を固定する．立方体 $Q \in \mathcal{Q}_{j,\varepsilon,\eta}$ に対して，ψ_Q を

$$\widehat{\psi}_Q = \chi_{2\pi Q}$$

で定義する．ここで，$\chi_{2\pi Q}$ は立方体 $2\pi Q$ の特性関数とする．また，$\rho \in \mathbb{Z}_+^{E\times H}$ に対して，

$$\mathcal{Q}_\rho := \bigcup_{(\varepsilon,\eta)\in E\times H} \mathcal{Q}_{\rho(\varepsilon,\eta),\varepsilon,\eta}$$

とおく．このとき，$\Psi := \{\psi_Q\}_{Q\in\mathcal{Q}_\rho}$ は正規直交ウェーブレットである．

特に，$\rho(\varepsilon, \eta)$ が定数の場合は，Ψ はマルチウェーブレットである．関数 ϕ_η を

$$\widehat{\phi}_\eta := \chi_{2\pi Q_\eta}$$

で定義すると，$\{\phi_\eta\}_{\eta\in H}$ はこれらのマルチウェーブレットのマルチスケーリング関数である．

図 1 に定理 2 によって構成される 2 次元のマルチウェーブレットのフーリエ空間におけるタイリングを示す．図 1 の左図は 12 個のマルチウェーブレットに対応し，フーリエ空間でさらに細かい解像度を得るために，あるマルチウェーブレットを別の細かい解像度にウェーブレットに取り替えることができることを示している．図 1 の右図では 27 個のウェーブレットになっている．このように，良い解像度を得るにはウェーブレットの数を増やさなければならないのである．

6　空間 $L^p(\mathbb{R}^n)$ におけるサンプリング定理と無条件収束

バナッハ空間 X の級数 $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$ が**無条件収束**するとは，$\mathbb{N}$ 上の任意の置換 σ に対して，級数 $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_{\sigma(n)}$ が収束するときをいう．このとき，級数 $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$ の極限がただひとつに決まることが示せる．

定理 3　正数 p, $1 < p < \infty$ に対して，$f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ とする．

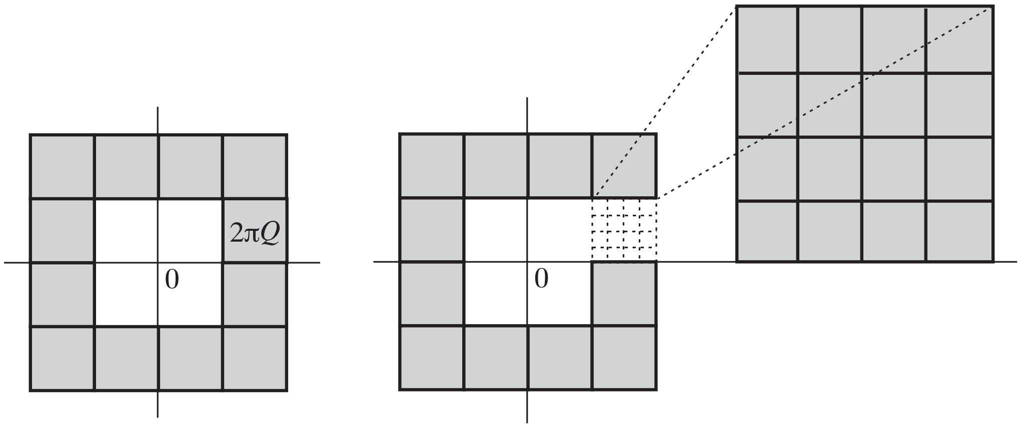

図 1: 2 次元のウェーブレットのフーリエ空間におけるタイリング

(1) 任意の $Q \in \mathcal{Q}_\rho$ と任意の $j \in \mathbb{Z}$ に対して，級数

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \langle f, (\psi_Q)_{j,k} \rangle \, (\psi_Q)_{j,k}$$

は $L^p(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$ で無条件収束する．すなわち，L^p ノルムで収束し，かつ $\mathbb{R}^n$ 上で一様収束する．この級数の和を $\mathcal{P}_j^Q f$ と表す.

(2) 級数 $\sum_{Q \in \mathcal{Q}_\rho, \ ,j \in \mathbb{Z}} \mathcal{P}_j^Q f$ は f に $L^p(\mathbb{R}^n)$ の意味で無条件収束する.

7　多次元フレーム超局所フィルタリング

基本的には定理 2 で構成した正規直交ウェーブレットを適当に滑らかに丸めることにより滑らかな隙間のないウェーブレットフレームできる．ここで，滑らかな隙間のないウェーブレットフレームを構成するウェーブレット関数のフーリエ変換の台は立方体 $2\pi Q$ に含まれるようにしたいため，立方体 πQ から始める．これは図 1 において，1 つだけ内側の環状の立方体のタイリングから始めることを意味する.

関数 $\vartheta(t)$ は $C_0^\infty(\mathbb{R})$ 関数であって,

$$\vartheta(t) \geq 0, \qquad \vartheta(t) = \vartheta(-t), \qquad \int_{\mathbb{R}} \vartheta(t)\, dt = 1, \qquad \vartheta(t) = \begin{cases} 1, & |t| \leq \frac{1}{3}; \\ 0, & |t| \geq \frac{2}{3} \end{cases}$$

を満たすとする．このとき，$\alpha > 0$ と $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$ に対して,

$$\vartheta_\alpha(\xi) = \frac{1}{\alpha^n} \prod_{j=1}^{n} \vartheta\Big(\frac{\xi_j}{\alpha}\Big)$$

とおくと，次の定理 4 を得る.

定理 4 $j \in \mathbb{Z}_+,\, \varepsilon \in E,\, \eta \in H,\, \alpha \in (0, 1/2)$ を固定する．

$$\lambda_Q(\xi) := (\vartheta_\alpha * \chi_{\pi Q})(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} \vartheta_\alpha(\xi - \zeta)\, \chi_{\pi Q}(\zeta)\, d\zeta, \qquad Q \in \mathcal{Q}_{j,\varepsilon,\eta}$$

とおく．ここで，$\chi_{\pi Q}$ は立方体 πQ の特性関数である．$\rho \in \mathbb{Z}_+^{E\times H}$ に対して，

$$\tau_\rho(\xi) := \sum_{j\in\mathbb{Z},\ Q\in\mathcal{Q}_\rho} |\lambda_Q(2^j\xi)|^2$$

とおき，$Q \in \mathcal{Q}_\rho$ に対して，$\psi_Q(x)$ を

$$\widehat{\psi}_Q(\xi) := \tau_\rho(\xi)^{-1/2}\, \lambda_Q(\xi)$$

で定義する．このとき，$\Psi := \{\psi_Q\}_{Q\in\mathcal{Q}_\rho}$ は隙間のないウェーブレットフレームである．

定理 4 の証明には定理 1 を使う．

8 数値計算による画像の修復

本節では，上に述べた理論を行列で表現される成分が有限個である画像の修復に適用してみる．画像には方向性を持った特異性（線分）を与えて，それを分離することを試みる．成分が有限個の画像をフィルタリングするために，画像に縁を付けておく．修復の手順は次のように行う．

- 修復すべき画像を A とし，そのフーリエ変換 B とする．
- B の値の絶対値が大きい方向（修復すべき画像に与えられた特異性の方向と直交する方向となる）を決めて，その方向と台が交わるような原点から離れたウェーブレットのフーリエ変換（滑らかにした特性関数）を B にかけて C を作る．
- C のウェーブレット係数は，プランシュレルの定理によって得られた式 (7) を，すなわち，
$$\langle \widehat{f}, \widehat{\psi}^\ell_{jk} \rangle = (2\pi)^2 \langle f, \psi^\ell_{jk} \rangle$$
をフーリエ空間で計算し，x 空間での値に戻して系 1 のウェーブレットフレーム展開 (6) を使って D を作る．
- フィルタリングによって画像 D のサイズが大きくなるが，その余分な部分を切り落として元の大きさにする．
- 適当に画像 D を定数倍したものを A から引き去り，修復した画像とする．

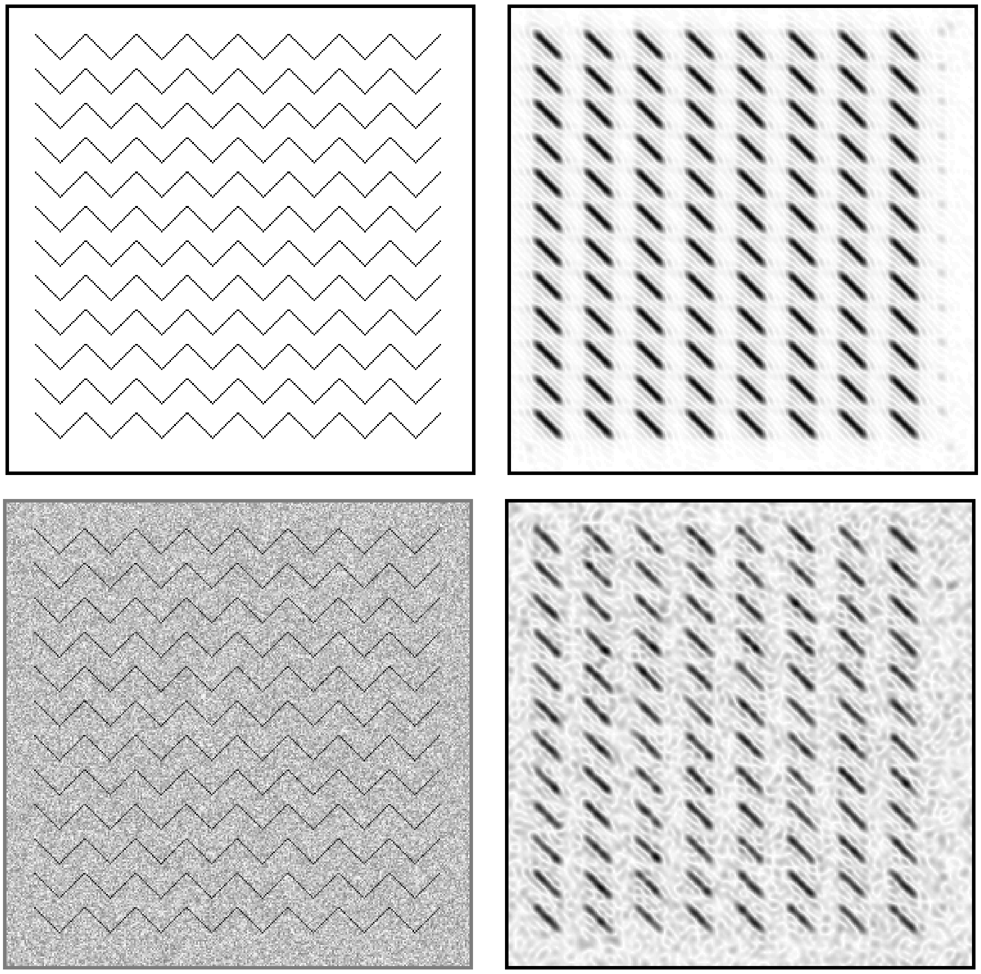

図 2: 上左：ジグザグ模様，上右：左上がりの方向だけフィルタリングした画像，下左：半分の高さのランダム雑音を付加したジグザグ模様，下右：雑音を付加した画像から左上がりの方向だけフィルタリングした画像

図 2 ではジグザグ模様から左上がりの方向だけフィルタリングしている．この図では，フーリエ空間で上右部分と下左部分をフィルタリングしているが，上右部分をフィルタリングしても，あるいは下左部分をフィルタリングしても同様の結果を得る．これにより，x 空間の位置によらず一定の方向の線分を分離できることがわかる．また，半分の高さのランダム雑音を付加しても同様の結果が得られる．

このフィルタリングの性質を使って，図 3 ではジグザグ模様を引いた少年の画像を修復している．

更に，x 空間のある位置に局在している一定の方向の線分を分離できる例を示そう．図 4 ではキズをつけた女性の画像を修復している．この図では，フーリエ空間で上右部分だけをフィルタリングしているが，下左部分をフィルタリングしても，あるいは上右部分と下左部分をフィルタリングしても同様の結果を得る．

図 3: 左：ジグザグ模様を引いた少年の画像，右：修復後の画像

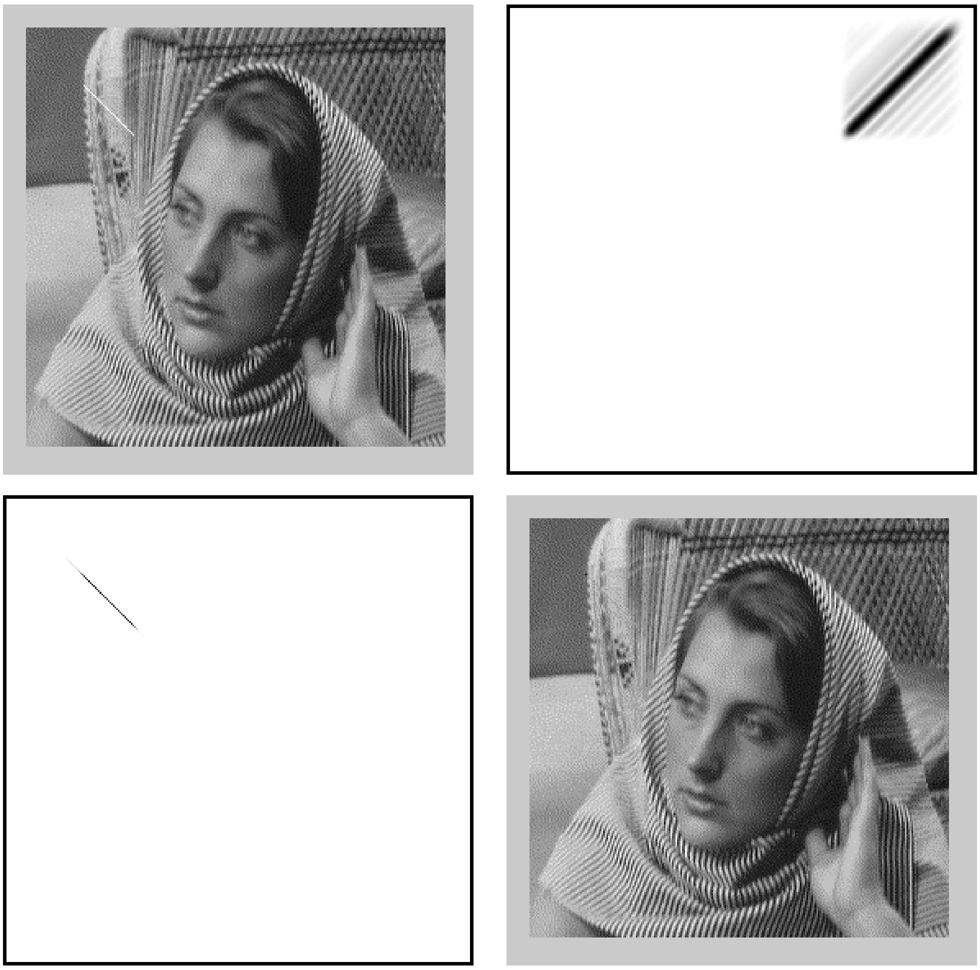

図 4: 上左：キズをつけた女性の画像，上右：フィルタリングしたフーリエ像のネガ（見やすいように外枠を付けている），下左：フィルタリングしたフーリエ像の逆変換（見やすいように外枠を付けている），下右：修復後の画像

参考文献

[1] R. Ashino, S. J. Desjardins, C. Heil, M. Nagase, and R. Vaillancourt, *Microlocal analysis, smooth frames and denoising in Fourier space*, Asian Information-science-life: An International Journal, **1**(2) (2002), to appear.

[2] R. Ashino, S. J. Desjardins, C. Heil, M. Nagase, and R. Vaillancourt, *Smooth tight frame wavelets and image microanalysis in the Fourier domain*, Comput. Math. Appl., to appear.

[3] R. Ashino, C. Heil, M. Nagase and R. Vaillancourt, *Microlocal filtering with multiwavelets*, Comput. Math. Appl., **41**(1-2) (2001) 111–133.

[4] R. Ashino, C. Heil, M. Nagase and R. Vaillancourt, *Microlocal analysis and multiwavelets*, in: Geometry, Analysis and Applications (Varanasi 2000), R. S. Pathak, ed., World Sci. Publishing, River Edge NJ, 2001, pp. 293–302.

[5] R. Ashino, C. Heil, M. Nagase and R. Vaillancourt, *Multiwavelets, pseudodifferential operators and microlocal analysis*, in: Wavelet Analysis and its Applications (Guangzhou, China, 1999), D. Deng et al., eds., AMS/IP Studies in Advanced Mathematics, Vol. 25, American Mathematical Society, Providence, RI, 2002, pp. 9–20.

[6] R. Ashino and T. Mandai, *Wavelet bases for microlocal filtering and the sampling theorem in* $L_p(\mathbb{R}^n)$, Appl. Anal., **82** (2003), 1–24.

[7] J. J. Benedetto and S. Li, *The theory of multiresolution analysis frames and applications to filter banks*, Appl. Comput. Harmon. Anal., **5** (1998) 389–427.

[8] I. Daubechies, *Ten Lectures on Wavelets*, SIAM, Philadelphia, 1992.

[9] R. J. Duffin and A. C. Schaeffer, *A class of nonharmonic Fourier series*, Trans. Amer. Math. Soc., **72** (1952) 341–366.

[10] F. Gensun, *Whittaker-Kotelnikov-Shannon sampling theorem and aliasing error*, J. Approx. Theory, **85**(1996), 115–131.

[11] M. Frazier, G. Garrigós, K. Wang and G. Weiss, *A characterization of functions that generate wavelet and related expansion*, J. Fourier Anal. Appl., **3** (1997), 883–906.

[12] C. E. Heil and D. F. Walnut, *Continuous and discrete wavelet transforms*, SIAM Review, **31**(4) (1989), pp. 628–666.

[13] S. Mallat *A wavelet tour of signal processing*, 2nd edition, Academic Press, San Diego CA, 1999.