教員養成課程 数学教育専攻(数学教育講座) 岡安 類

作用素環と離散群

(離散)群は数学において最も基本的な研究対象であり，様々な側面をもっているが，私は解析的な側面に注目し研究を続けている。そのために群の線形化を行う。つまり，群を適当な線形空間(or ベクトル空間)の上の作用素(or 行列)として表現し，更に線形空間とその上の作用素に適当な位相を入れることによって，解析的に取り扱うことが可能となる。まず具体例で以上のことを簡単に説明しよう。

高校数学において，座標平面上の基本ベクトル $\vec{e}_1$ と $\vec{e}_2$ は，x軸とy軸に対応していた。これらは長さ 1 で互いに直交し，すべてのベクトル $\vec{a}$ を一意的に成分表示 $\vec{a}=a_1\vec{e}_1+a_2\vec{e}_2$ できた。この事実を2次元空間から無限次元空間へ拡張する。はじめに，互いに直交する軸 $\{\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3,\cdots\}$ を用意する。但し，この空間のベクトル$\vec{a}$の成分表示を考えると無限和 $\vec{a}=a_1\vec{e}_1+a_2\vec{e}_2+a_3\vec{e}_3+\cdots$ の収束の意味を考える必要があることに注意する。ここでは2乗総和可能列，即ち，無限和 $|a_1|^2+|a_2|^2+|a_3|^2+\cdots$ が有限であるもののみを考える。これが上記の適当な位相を意味する。このような空間をヒルベルト空間と呼ぶ。

次に，整数群 $\boldsymbol{Z}=\{\cdots,-2,-1,0,1,2,\cdots\}$ を考える。整数でラベル付けされた基本ベクトル $\{\cdots,\vec{e}_{-2},\vec{e}_{-1},\vec{e}_0,\vec{e}_1,\vec{e}_2,\cdots\}$ を用意して，対応するヒルベルト空間を $l^2(\boldsymbol{Z})$ で表す。次に 基本ベクトルを 1 個ずらす移動：$\vec{e}_n\to\vec{e}_{n+1}$ を T_1 で表すと，T_1 はヒルベルト空間 $l^2(\boldsymbol{Z})$ 上の作用素となる。同様に m 個ずらす作用素 T_m も考えられる。これで整数の足し算の構造も込みで考えることができる対象ができたことになる。即ち，$T_m\cdot T_n=T_{m+n}$ が成り立つ。(左辺は n 個ずらしてから m 個ずらすことを意味し，右辺はまとめて $m+n$ 個ずらすことを意味している。) 最後に，このずらし作用素たちの集まりに適当な位相を考えることによって，作用素環が得られる。作用素環には考える位相によって C*環とフォン・ノイマン環の2種類に分けられる。今回は特に C*環について考えたい。上記のずらし作用素からできる C*環は $C^*(\boldsymbol{Z})$ と表される。以上は整数群 $\boldsymbol{Z}$ に限らず，一般の群 G から C*環を構成できる。これを群 C*環といい，$C^*(G)$ と表される。

群 G から群 C*環 $C^*(G)$ を作ったとき，「群 G の性質が群 C*環 $C^*(G)$ にどのように反映されるか？」または「群 C*環 $C^*(G)$ はどの程度バラエティ富んでいるか？」などが素朴な問題として考えられる。前述の整数群 $\boldsymbol{Z}$ の群 C*環 $C^*(\boldsymbol{Z})$ は学部3回生が学ぶフーリエ変換を通して，単位円周 $\boldsymbol{T}$ 上の連続関数環 $C(\boldsymbol{T})$ であることがわかる。このような図形(もっと一般にコンパクト距離空間)上の連続関数環は最も基本的な C*環であり，作用素環ではつまらないものとされている。そこで面白い群 C*環を紹介しよう。

自由群 $\boldsymbol{F}$ を考えよう。集合としては 2 つのスペル a と b とその逆元 a^{-1}，b^{-1} でできる(既約)単語全体である。**単語**とは有限個のスペルを並べたもの $x_1x_2\cdots x_m$ で，次の規則に従うものとする。

- 各 x_i は a,b,a^{-1},b^{-1} のいずれかである。
- 隣同士に互いの逆元がこない。 例えば，$x_i=a$ ならば $x_{i+1}\neq a^{-1}$ である。

次に 2 つの単語 $x_1x_2\cdots x_m$ と $y_1y_2\cdots y_n$ を合わせて新しい単語を作る規則(**積構造**)を次のように決める。

1. 2つの単語を並べる。 $x_1x_2\cdots x_my_1y_2\cdots y_n$
2. スペル x_m と y_1 が互いに逆元でなければ，$x_1x_2\cdots x_my_1y_2\cdots y_n$ が新しい単語。
3. スペル x_m と y_1 が互いに逆元ならば，これらを消去し，$x_1x_2\cdots x_{m-1}y_2\cdots y_n$ において，x_{m-1} と y_2 が互いに逆元かどうか考える。
4. 以下同様の作業を続ける。もしスペルが何も残らなければ，単語は e とする。(単位元)

簡単にチェックができるように，整数群 $\boldsymbol{Z}$ は足し算に関して交換可能である。つまり，$m+n=n+m$ である。しかし,自由群 $\boldsymbol{F}$ の積は交換可能ではない。(高校数学で学んだ行列の積も交換可能ではなかった。) つまり，いつでも

$$(x_1x_2\cdots x_m)(y_1y_2\cdots y_n)=(y_1y_2\cdots y_n)(x_1x_2\cdots x_m)$$

が成立するとは限らない。更に対応する群 C*環 $C^*(\boldsymbol{F})$ は連続関数環とはかけ離れた性質を有する。例えば，$C^*(\boldsymbol{F})$ は単純である。即ち，自明なイデアルしかもたない。一方，連続関数環 $C(\boldsymbol{T})$ の場合，円周上の閉区間を考えれば，それらはすべてイデアルと対応していることがわかるので，無数に存在する。

昨年, N. P. Brown (Penn State Univ.) と E. Guentner (Univ. of Hawaii) によって新しい群 C*環の構成法が与えられた。これはイデアル $\boldsymbol{D}$ に付随する群 C*環 $C^*_D(G)$ であるが，本当に新しい構成法であることを示すために彼らは，「イデアル l^p に付随する自由群 C*環 $C^*_{l^p}(\boldsymbol{F})$ が従来の自由群 C*環 $C^*(\boldsymbol{F})$ と異なるような p の存在」を証明した。但し，p は $p>2$ となる実数。これは極めて弱い結果である。実際，彼らは「実数pが異なれば，$C^*_{l^p}(\boldsymbol{F})$ は互いに非同型」であると予想したが，最近，私はこの予想が正しいことを証明した。更に，$C^*_{l^p}(\boldsymbol{F})$ の様々な性質の違いについても調べることができた。今後はより一般の離散群 G とイデアル D に付随する群 C*環 $C^*_D(G)$ の研究が課題である。