重心の運動エネルギーはどこからくるの？

ver. 1.0　2016 年 10 月 24 日　越 桐 國 雄

1　はじめに

身の回りの力や運動に関する現象を，物理学（力学や熱力学など）の理論に基づいて説明する場合に，日常的な言葉による概念的な理解と数式を用いる法則的な理解がうまくつながらず，学習者や教授者に混乱が生ずる場合がある。例えば，系の内部にエネルギー源があって，これを利用して系が推進する場合や，拘束力が働く系における仕事などがその典型的な例として，議論が続いてきた。

ここでは，対象とする物体を多粒子系（質点系）であると近似し，各粒子（質点）には，系の外部から粒子に働く外力と粒子同士の間に働く内力があり，これらによって物体の運動がニュートンの運動方程式によって説明できるものと仮定する。その上で，人間がロープを登る運動，自転車や自動車が前に進む運動，氷上で壁を押して進む運動などで議論されている問題点を抽象化して次のように整理する。

1. 作用点が変位しない外力は，系の重心の運動エネルギーの変化に寄与するか？
2. 内力は，系の重心の運動エネルギーの変化に寄与するか？

これらの問題について検討していこう。

2　多粒子系の力学

2.1　運動方程式

対象とする物体が，十分に小さい N 個の粒子（質点）からなる多粒子系（質点系）で近似できたとする。このとき，慣性系におけるこの系の古典的で非相対論的な運動は，次のように各粒子に対するニュートンの運動方程式を連立したもので記述される（図 1 参照）。

$$m_i \frac{d^2\boldsymbol{r}_i}{dt^2} = \boldsymbol{F}_i = \boldsymbol{F}_i^{ex} + \sum_{j=1}^{N} \boldsymbol{F}_{ji}^{in} \qquad (i = 1 \cdots N) \tag{1}$$

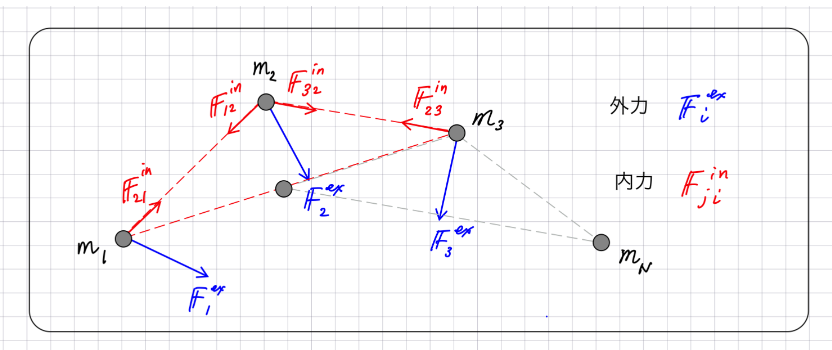

図 1

ここで，m_i は i 番目の粒子の質量，$\boldsymbol{r}_i$ は i 番目の粒子の位置ベクトルである。$\boldsymbol{F}_i$ は i 番目の粒子に働く全ての力の和であり，i 番目の粒子に働く外力 $\boldsymbol{F}_i^{ex}$ と，j 番目の粒子と i 番目の粒子の間に働く内力 $\boldsymbol{F}_{ji}^{in}$ に分け

られる。内力は作用反作用の法則を満たすものとし，$\boldsymbol{F}_{ji}^{in} + \boldsymbol{F}_{ij}^{in} = 0$ である（$\boldsymbol{F}_{ii}^{in} \equiv 0$ とする）。外力も作用反作用の法則を満足するが，系が外界に及ぼす力 $-\boldsymbol{F}_{i}^{ex}$ の方は，系の運動に関しては考える必要がない。

2.2　重心運動と相対運動

次に，この多粒子系の重心運動を考えるために，系の全質量 M と系の重心座標 $\boldsymbol{r}_G$ を導入する。

$$
\begin{aligned}
M &= \sum_{i=1}^{N} m_i \\
\boldsymbol{r}_G &= \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i \boldsymbol{r}_i
\end{aligned} \tag{2}
$$

さらに，重心座標を基準とした各粒子の相対座標 $\tilde{\boldsymbol{r}}_i$ を次のように定義すると，以下の関係式が成立する（図2参照)。

$$
\begin{aligned}
\tilde{\boldsymbol{r}}_i &= \boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_G \\
\sum_{i=1}^{N} m_i \tilde{\boldsymbol{r}}_i &= 0
\end{aligned} \tag{3}
$$

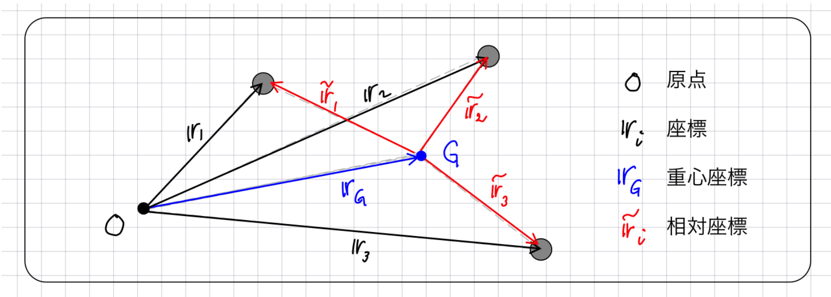

図 2

各粒子に対する運動方程式 (1) を系のすべての粒子について足し合わせると，多粒子系の重心座標に関する運動方程式が得られる。

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{N} m_i \frac{d^2\boldsymbol{r}_i}{dt^2} &= \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{F}_i \\
&= \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{F}_i^{ex} + \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} \boldsymbol{F}_{ji}^{in} \\
\therefore M\frac{d^2\boldsymbol{r}_G}{dt^2} &= \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{F}_i^{ex} \equiv \boldsymbol{F}^{ex}
\end{aligned} \tag{4}
$$

作用反作用の法則から，i 番目の粒子と j 番目の粒子に働く内力の対の和は 0 であったため，系の内力の総和も 0 である。つまり，多粒子系の重心座標の運動方程式において内力の寄与はなく，**多粒子系の重心座標 $\boldsymbol{r}_G(t)$ からなる力積 $M\dot{\boldsymbol{r}}_G(t)$ の時間変化には外力の総和 $\boldsymbol{F}^{ex}$ のみが寄与する。**次に，各粒子の重心からみた相対運動の運動方程式を考えてみよう。

$$
m_i\left(\frac{d^2\tilde{\boldsymbol{r}}_i}{dt^2} + \frac{d^2\boldsymbol{r}_G}{dt^2}\right) = \boldsymbol{F}_i^{ex} + \sum_{j=1}^{N} \boldsymbol{F}_{ji}^{in} \tag{5}
$$

$$\therefore m_i \frac{d^2 \tilde{\boldsymbol{r}}_i}{dt^2} = \boldsymbol{F}_i^{ex} + \sum_{j=1}^{N} \Big(-\frac{m_i}{M} \boldsymbol{F}_j^{ex} + \boldsymbol{F}_{ji}^{in} \Big) \tag{6}$$

したがって，**多粒子系の相対座標** $\tilde{\boldsymbol{r}}_i(t)$ **からなる力積** $m_i \dot{\tilde{\boldsymbol{r}}}_i(t)$ **の時間変化にはすべての外力と内力が寄与する。**

2.3　運動エネルギーと仕事

次に，この多粒子系の運動方程式を時間で積分した際に現れる諸量について考える。
各粒子の運動方程式（1）の両辺に対し，その粒子の速度ベクトル $\dfrac{d\boldsymbol{r}_i}{dt}$ との内積をとって，時間 t で t_1 から t_2 まで積分すると以下の関係式が得られる。

$$\begin{gathered} \int_{t_1}^{t_2} m_i \frac{d^2 \boldsymbol{r}_i}{dt^2} \cdot \frac{d\boldsymbol{r}_i}{dt} dt = \int_{t_1}^{t_2} \boldsymbol{F}_i \cdot \frac{d\boldsymbol{r}_i}{dt} dt \\ \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \Big(\frac{m_i}{2} \frac{d\boldsymbol{r}_i}{dt} \cdot \frac{d\boldsymbol{r}_i}{dt} \Big) dt = \int_{\boldsymbol{r}_i(t_1)}^{\boldsymbol{r}_i(t_2)} \boldsymbol{F}_i \cdot d\boldsymbol{r}_i \\ T_i(t_2) - T_i(t_1) = W_i(t_1 \to t_2) \end{gathered} \tag{7}$$

ここで $T_i(t)$ を時刻 t における i 番目の粒子の**運動エネルギー**とよび次式で定義する。

$$T_i(t) = \frac{m_i}{2} \Big(\frac{d\boldsymbol{r}_i}{dt} \Big)^2 \tag{8}$$

また，上式の右辺は，i 番目の粒子に作用する力の和 $\boldsymbol{F}_i$ がこの粒子の運動に及ぼした効果のひとつであり，これを力 $\boldsymbol{F}_i$ が i 番目の粒子にする**仕事**とよび次式で定義する（なお，力が粒子の運動に及ぼす効果としては，力を時間で積分した**力積**も重要な量であり，これはその運動量変化に寄与する）。

$$W_i(t_1 \to t_2) = \int_{\boldsymbol{r}_i(t_1)}^{\boldsymbol{r}_i(t_2)} \boldsymbol{F}_i \cdot d\boldsymbol{r}_i \tag{9}$$

i 番目の粒子に加わる力 $\boldsymbol{F}_i$ とその粒子の変位 $d\boldsymbol{r}_i$ の内積が経路にわたって 0 の場合，力 $\boldsymbol{F}_i$ が i 番目の粒子にする仕事は 0 であり，この粒子の運動エネルギーは変化しない。拘束条件が課されて，つねに $d\boldsymbol{r}_i = 0$ となる場合もこれに該当する。

【保存力とポテンシャルに関する補足】

一般に，この仕事 $W_i(t_1 \to t_2)$ は，粒子の運動経路に依存するが，特別の場合は経路によらず，始点と終点の座標のみに依存する。このとき，粒子に働く力は $\boldsymbol{F}_i(\boldsymbol{r}_i)$ は，位置座標のスカラー関数である**ポテンシャル（位置エネルギー）** $U_i(\boldsymbol{r}_i)$ の負の勾配として与えられ，力 $\boldsymbol{F}_i$ は**保存力**であるという。

$$\boldsymbol{F}_i(\boldsymbol{r}_i) = -\nabla U_i(\boldsymbol{r}_i) \equiv -\Big(\frac{\partial U_i(\boldsymbol{r}_i)}{\partial x_i} \boldsymbol{e}_x + \frac{\partial U_i(\boldsymbol{r}_i)}{\partial y_i} \boldsymbol{e}_y + \frac{\partial U_i(\boldsymbol{r}_i)}{\partial z_i} \boldsymbol{e}_z \Big) \tag{10}$$

この場合，粒子に働くポテンシャル U_i から導かれる保存力 $\boldsymbol{F}_i$ のする仕事は，

$$\begin{aligned} W_i(t_1 \to t_2) &= \int_{\boldsymbol{r}_i(t_1)}^{\boldsymbol{r}_i(t_2)} -\nabla U_i(\boldsymbol{r}_i) \cdot d\boldsymbol{r}_i \\ &= -\int_{\boldsymbol{r}_i(t_1)}^{\boldsymbol{r}_i(t_2)} \Big(\frac{\partial U_i(\boldsymbol{r}_i)}{\partial x_i} dx_i + \frac{\partial U_i(\boldsymbol{r}_i)}{\partial y_i} dy_i + \frac{\partial U_i(\boldsymbol{r}_i)}{\partial z_i} dz_i \Big) \\ &= -\int_{\boldsymbol{r}_i(t_1)}^{\boldsymbol{r}_i(t_2)} dU_i(\boldsymbol{r}_i) = U_i(\boldsymbol{r}_i(t_1)) - U_i(\boldsymbol{r}_i(t_2)) \end{aligned} \tag{11}$$

したがって，粒子に働く力が保存力の場合 (7) 式は，ポテンシャル $U_i(\boldsymbol{r}_i(t))$ を $U_i(t)$ と書いて，

$$\begin{aligned} T_i(t_2) - T_i(t_1) = U_i(t_1) - U_i(t_2) \\ \therefore T_i(t_2) + U_i(t_2) = T_i(t_1) + U_i(t_1) \end{aligned} \tag{12}$$

これは，粒子の運動エネルギーと位置エネルギー（ポテンシャル）の和がどの時間でも等しいことを表し，**力学的エネルギーの保存則**を表している。

2.4　多粒子系の運動エネルギー

多粒子系全体の運動エネルギー変化を考えるため，(7) 式をすべての粒子について加え，系の全運動エネルギーを $T(t) \equiv \sum_{i=1}^{N} T_i(t)$ と定義すると，

$$\begin{aligned} T(t_2) - T(t_1) &= \sum_{i=1}^{N} \int_{\boldsymbol{r}_i(t_1)}^{\boldsymbol{r}_i(t_2)} \boldsymbol{F}_i \cdot d\boldsymbol{r}_i \\ &= \sum_{i=1}^{N} \int_{\boldsymbol{r}_i(t_1)}^{\boldsymbol{r}_i(t_2)} \boldsymbol{F}_i^{ex} \cdot d\boldsymbol{r}_i + \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \int_{\boldsymbol{r}_i(t_1)}^{\boldsymbol{r}_i(t_2)} \boldsymbol{F}_{ji}^{in} \cdot d\boldsymbol{r}_i \\ &= \sum_{i=1}^{N} W_i^{ex}(t_1 \to t_2) + \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} W_{ji}^{in}(t_1 \to t_2) \\ &= W^{ex}(t_1 \to t_2) + W^{in}(t_1 \to t_2) \end{aligned} \tag{13}$$

すなわち，多粒子系における外力による仕事 $W^{ex}(t_1 \to t_2)$ と内力による仕事 $W^{in}(t_1 \to t_2)$ の和が，多粒子系全体の運動エネルギーの増加分と等しくなる。

ところで，$T(t)$ を重心座標と相対座標で表現すると，

$$\begin{aligned} T(t) &= \sum_{i=1}^{N} T_i(t) = \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i}{2}\big(\frac{d\boldsymbol{r}_i}{dt}\big)^2 \\ &= \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i}{2}\big(\frac{d\boldsymbol{r}_G}{dt} + \frac{d\tilde{\boldsymbol{r}}_i}{dt}\big)^2 \\ &= \frac{M}{2}\big(\frac{d\boldsymbol{r}_G}{dt}\big)^2 + 2\frac{d\boldsymbol{r}_G}{dt}\cdot\sum_{i=1}^{N}\frac{m_i}{2}\frac{d\tilde{\boldsymbol{r}}_i}{dt} + \sum_{i=1}^{N}\frac{m_i}{2}\big(\frac{d\tilde{\boldsymbol{r}}_i}{dt}\big)^2 \\ &= \frac{M}{2}\big(\frac{d\boldsymbol{r}_G}{dt}\big)^2 + \sum_{i=1}^{N}\frac{m_i}{2}\big(\frac{d\tilde{\boldsymbol{r}}_i}{dt}\big)^2 \\ &= T_G(t) + \sum_{i=1}^{N}\tilde{T}_i(t) = T_G(t) + \tilde{T}(t) \end{aligned} \tag{14}$$

ここで，$T_G(t)$ は重心運動の運動エネルギー，$\tilde{T}_i(t)$，$\tilde{T}(t)$ は，それぞれ各粒子の相対運動の運動エネルギーとその総和であり，式 (3) の条件により重心座標と相対座標の両者が結合した項は消える。

2.5 重心運動と相対運動の運動エネルギー

重心運動の運動方程式 (4) の両辺に対し，重心運動の速度ベクトル $\dfrac{d\boldsymbol{r}_G}{dt}$ との内積をとって，時間 t で t_1 から t_2 まで積分すると，

$$\begin{gathered} \int_{t_1}^{t_2} M\frac{d^2\boldsymbol{r}_G}{dt^2}\cdot\frac{d\boldsymbol{r}_G}{dt}dt = \int_{t_1}^{t_2}\boldsymbol{F}^{ex}\cdot\frac{d\boldsymbol{r}_G}{dt}dt \\ \int_{t_1}^{t_2}\frac{d}{dt}\big(\frac{M}{2}\frac{d\boldsymbol{r}_G}{dt}\cdot\frac{d\boldsymbol{r}_G}{dt}\big) = \int_{\boldsymbol{r}_G(t_1)}^{\boldsymbol{r}_G(t_2)}\boldsymbol{F}^{ex}\cdot d\boldsymbol{r}_G \\ T_G(t_2) - T_G(t_1) = \overline{W}_G^{ex}(t_1\to t_2) \end{gathered} \tag{15}$$

ここで，$\overline{W}_G^{ex}(t_1\to t_2)$ は外力の仕事 $W^{ex}(t_1\to t_2)$ とは異なっていることに注意する必要がある。$\overline{W}_G^{ex}(t_1\to t_2)$ は**擬仕事（pseudo work）**とよばれることもある（例えば，一様な重力場中の多粒子系のように，粒子に働く外力の大きさがその質量に比例し，その方向が共通である場合などに限り，外力による仕事 $W^{ex}(t_1\to t_2)$ は，外力の合力が重心に作用すると考えた擬仕事 $\overline{W}_G^{ex}(t_1\to t_2)$ と一致する）。

相対運動の運動方程式 (6) の両辺に対し，相対運動の速度ベクトル $\dfrac{d\tilde{\boldsymbol{r}}_i}{dt}$ との内積をとって，時間 t で t_1 から t_2 まで積分したものを全粒子について加えると，

$$\begin{gathered} \int_{t_1}^{t_2}\sum_{i=1}^{N} m_i\frac{d^2\tilde{\boldsymbol{r}}_i}{dt^2}\cdot\frac{d\tilde{\boldsymbol{r}}_i}{dt}dt = \int_{t_1}^{t_2}\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{F}_i^{ex}\cdot\frac{d\tilde{\boldsymbol{r}}_i}{dt}dt + \int_{t_1}^{t_2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\big(-\frac{m_i}{M}\boldsymbol{F}_j^{ex} + \boldsymbol{F}_{ji}^{in}\big)\cdot\frac{d\tilde{\boldsymbol{r}}_i}{dt}dt \\ \int_{t_1}^{t_2}\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{N}\big(\frac{m_i}{2}\frac{d\tilde{\boldsymbol{r}}_i}{dt}\cdot\frac{d\tilde{\boldsymbol{r}}_i}{dt}\big) = \int_{t_1}^{t_2}\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{F}_i^{ex}\cdot\frac{d\boldsymbol{r}_i}{dt}dt + \int_{t_1}^{t_2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\big(-\frac{m_i}{M}\boldsymbol{F}_j^{ex} + \boldsymbol{F}_{ji}^{in}\big)\cdot\frac{d\boldsymbol{r}_i}{dt}dt \\ \tilde{T}(t_2) - \tilde{T}(t_1) = W^{ex}(t_1\to t_2) - \overline{W}_G^{ex}(t_1\to t_2) + W^{in}(t_1\to t_2) \end{gathered} \tag{16}$$

ここで，右辺における $\dfrac{d\boldsymbol{r}_G}{dt}$ を含む項の和は 0 となることに注意する。

さて，以上をまとめると，多粒子系の重心運動と相対運動の運動エネルギーのそれぞれの変化について次の関係式のように整理できた。

$$\begin{cases} T_G(t_2) - T_G(t_1) = \overline{W}_G^{ex}(t_1 \to t_2) & \cdots \text{重心運動} \\ \tilde{T}(t_2) - \tilde{T}(t_1) = W^{ex}(t_1 \to t_2) - \overline{W}_G^{ex}(t_1 \to t_2) + W^{in}(t_1 \to t_2) & \cdots \text{相対運動} \\ T(t_2) - T(t_1) = W^{ex}(t_1 \to t_2) + W^{in}(t_1 \to t_2) & \cdots \text{系の運動} \end{cases} \tag{17}$$

つまり，重心運動の運動量や運動エネルギーの変化に寄与するのは外力であり，内力はこれに寄与しない。一方，相対運動の運動量や運動エネルギーの変化には，内力とともに外力も寄与する。系の全運動エネルギーの増加に寄与するのは，外力と内力による仕事の和だけであるが，これを重心運動と相対運動に分離した場合には，仕事ではない擬仕事がそれぞれに関与することになる（全体では擬仕事は相殺する)。

【ここまでのまとめ】

1. 力の作用点が変位しない「外力」は系全体に対して「仕事」をしないが,「外力」のみからなる「擬仕事（**pseudo work**)」が系の重心の「運動エネルギー」の変化に寄与する。しかしながら「内力」は系の重心の「運動量」や「運動エネルギー」の変化に寄与しない。

2. 重心の「運動量」や「運動エネルギー」の変化には，それが束縛力（拘束力）であっても外力のみが寄与することを強調する意義はある。また，外力による「擬仕事」は，重心運動エネルギーと相対運動エネルギーに対してそれぞれ逆符号で寄与しその総和は０である。これらの内容は後藤さんの考えの骨子と同じである。

3. ただ,「擬仕事」の項を「重心」に対する「仕事」とよぶことには（力を各粒子に働く項に分割した場合の外力の仕事の説明との整合性などから)，物理用語の「定義」の錯綜を招くことになるので避けたほうがよいと思う。