続・重心の運動エネルギーはどこからくるの？

ver. 1.0　2016 年 11 月 2 日　越 桐 國 雄

1　前回のまとめ

外力と内力が働く多粒子系の運動を，重心運動と相対運動に分離して，それぞれの運動エネルギーの変化と力の関係を整理した結果，次の関係式が得られた。ここでは，質量 m_i で位置ベクトルが $\boldsymbol{r}_i$ である N 個の粒子からなる多体系を考え，i 番目の粒子には外力 $\boldsymbol{F}_i^{ex}$ 及び $j(\neq i)$ 番目の粒子との間の内力 $\boldsymbol{F}_{ji}^{in}$ が働くとする。

【外力と内力を含む多粒子系の運動方程式と全系の運動エネルギー T】

$$m_i \frac{d^2 \boldsymbol{r}_i}{dt^2} = \boldsymbol{F}_i = \boldsymbol{F}_i^{ex} + \sum_{j=1}^{N} \boldsymbol{F}_{ji}^{in} \quad (i = 1 \cdots N), \qquad T = \sum_{i=1}^{N} T_i = \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i}{2} \Big(\frac{d\boldsymbol{r}_i}{dt}\Big)^2 \tag{1}$$

これから全系の運動エネルギーの変化分を求めると，

$$\begin{aligned}
\Delta T \equiv T(t_2) - T(t_1) &= \int_{t_1}^{t_2} \frac{dT}{dt} dt \\
&= \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^{N} m_i \frac{d^2 \boldsymbol{r}_i}{dt^2} \cdot \frac{d\boldsymbol{r}_i}{dt} dt = \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^{N} \big(\boldsymbol{F}_i^{ex} + \sum_{j=1}^{N} \boldsymbol{F}_{ji}^{in}\big) \cdot \frac{d\boldsymbol{r}_i}{dt} dt \\
&= \sum_{i=1}^{N} \int_{\boldsymbol{r}_i(t_1)}^{\boldsymbol{r}_i(t_2)} \boldsymbol{F}_i^{ex} \cdot d\boldsymbol{r}_i + \sum_{i=1}^{N} \int_{\boldsymbol{r}_i(t_1)}^{\boldsymbol{r}_i(t_2)} \sum_{j=1}^{N} \boldsymbol{F}_{ji}^{in} \cdot d\boldsymbol{r}_i \\
&= \sum_{i=1}^{N} W_i^{ex}(t_1 \to t_2) + \sum_{i=1}^{N} W_i^{in}(t_1 \to t_2) \\
&= W^{ex}(t_1 \to t_2) + W^{in}(t_1 \to t_2)
\end{aligned} \tag{2}$$

ここで，T_i は i 番目の粒子の運動エネルギー，W_i^{ex} と W_i^{in} はそれぞれ外力と内力が i 番目の粒子に対してする**仕事**を表しており，系に対して外力がした仕事 W^{ex} と内力がした仕事 W^{in} の和だけ全系の運動エネルギー T が変化する。

【重心座標と相対座標の定義】

$$\begin{cases}
\boldsymbol{r}_G = \Big(\sum_{i=1}^{N} m_i \boldsymbol{r}_i\Big) / \Big(\sum_{i=1}^{N} m_i\Big) = \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i \boldsymbol{r}_i}{M} \\
\tilde{\boldsymbol{r}}_i = \boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_G \\
\quad \sum_{i=1}^{N} m_i \tilde{\boldsymbol{r}}_i = 0
\end{cases} \tag{3}$$

[補足 1] 相対運動の位置ベクトルには条件がついているため，独立な位置ベクトルは $N-1$ 個である。例えば，二粒子系の場合，$\tilde{\boldsymbol{r}}_1 = (m_2/M)(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2)$，$\tilde{\boldsymbol{r}}_2 = (m_1/M)(\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1)$，であり互いに独立ではない。そこで，２粒子系の場合の相対座標を $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r_2} - \boldsymbol{r_1}$ で定義する（この場合の相対運動エネルギー $\tilde{T}$ は，換算質量を $\mu = m_1 m_2 / M$ とし

て $\tilde{T} = \frac{\mu}{2}\dot{\boldsymbol{r}}^2$ で表され，以下の相対運動の項で定義される $\frac{m_1}{2}\dot{\tilde{\boldsymbol{r}}}_1^2 + \frac{m_2}{2}\dot{\tilde{\boldsymbol{r}}}_2^2$ と一致することが確かめられる)。

【多粒子系の重心運動の運動方程式と重心運動エネルギー T_G】

$$M\frac{d^2\boldsymbol{r}_G}{dt^2} = \sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{F}_i^{ex} = \boldsymbol{F}^{ex}, \qquad T_G = \frac{M}{2}\Big(\frac{d\boldsymbol{r}_G}{dt}\Big)^2 \tag{4}$$

これから重心運動エネルギーの変化分を求めると，

$$\begin{aligned}\Delta T_G = T_G(t_2) - T_G(t_1) &= \int_{t_1}^{t_2}\frac{dT_G}{dt}dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} M\frac{d^2\boldsymbol{r}_G}{dt^2}\cdot\frac{d\boldsymbol{r}_G}{dt}dt = \int_{t_1}^{t_2}\boldsymbol{F}^{ex}\cdot\frac{d\boldsymbol{r}_G}{dt}dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2}\Big(\sum_{j=1}^{N}\boldsymbol{F}_j^{ex}\Big)\cdot\Big(\sum_{i=1}^{N}\frac{m_i}{M}\frac{d\boldsymbol{r}_i}{dt}\Big)dt \\ &= \sum_{i=1}^{N}\int_{\boldsymbol{r}_i(t_1)}^{\boldsymbol{r}_i(t_2)}\Big(\sum_{j=1}^{N}\boldsymbol{F}_j^{ex}\Big)\cdot\frac{m_i d\boldsymbol{r}_i}{M} \\ &= \sum_{i=1}^{N}\overline{W}_i(t_1\to t_2) = \overline{W}(t_1\to t_2)\end{aligned} \tag{5}$$

ここで，T_G は重心運動エネルギー，$\overline{W}_i$ は i 番目の粒子に対する外力の**擬仕事 (pseudo-work)** であり，この擬仕事の和だけ重心運動エネルギーが変化する。これを擬仕事とよんだのは，微視的に見れば $j(\neq i)$ 番目の粒子に働く力と i 番目の粒子の変位の積が現れ，通常の仕事の定義とは異なるからである。

[補足 **2**] 擬仕事は系を重心運動と相対運動に分離して説明する場合に必要となる概念である。一般には系を構成する各粒子に対する通常の仕事の概念だけで重心運動エネルギーの変化を記述することはできない。なお，全系の運動エネルギー変化に関しては擬仕事は寄与せず，擬仕事による系の外部とのエネルギーの授受もない。

[補足 **3**] 各粒子に働く外力の擬仕事の和は，重心の運動方程式に現れる外力の和と重心の変位の積の形をしている。そこで，具体的な問題を解く場合には，「擬仕事」という概念を知らなくとも，外力を重心に集めて重心の変位との積 (積分) を計算した「仕事」を求めることで正しい結果が得られる。重心運動エネルギーの変化と擬仕事の関係式は，力が保存力かどうか，拘束力かどうか，内力があるかどうか，などには依存しないことに注意する。

[補足 **4**] 一般的には，ここで示した式のように重心運動エネルギーの変化に内力が寄与することはない。ただし，外力が拘束力の場合で，それによって固定される粒子がある場合には，その点に働く外力と内力のつり合いの条件式を用いて外力を消去すれば，重心運動エネルギーの変化を内力の仕事によって記述する余地がある。しかしながら，より適応範囲が広いのは擬仕事による式である。

【多粒子系の相対運動の運動方程式と相対運動エネルギー $\tilde{T}$】

$$m_i\frac{d^2\tilde{\boldsymbol{r}}_i}{dt^2} = \boldsymbol{F}_i^{ex} + \sum_{j=1}^{N}\Big(-\frac{m_i}{M}\boldsymbol{F}_j^{ex} + \boldsymbol{F}_{ji}^{in}\Big), \qquad \tilde{T} = \sum_{i=1}^{N}\tilde{T}_i = \sum_{i=1}^{N}\frac{m_i}{2}\Big(\frac{d\tilde{\boldsymbol{r}}_i}{dt}\Big)^2 = T - T_G \tag{6}$$

これから相対運動エネルギーの変化分を求めると，

$$
\begin{aligned}
\Delta\tilde{T} &= \tilde{T}(t_2) - \tilde{T}(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} \frac{d\tilde{T}}{dt} dt \\
&= \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^{N} m_i \frac{d^2\tilde{\boldsymbol{r}}_i}{dt^2} \cdot \frac{d\tilde{\boldsymbol{r}}_i}{dt} dt = \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^{N} \Big\{ \boldsymbol{F}_i^{ex} + \sum_{j=1}^{N} \big(-\frac{m_i}{M} \boldsymbol{F}_j^{ex} + \boldsymbol{F}_{ji}^{in} \big) \Big\} \cdot \frac{d\tilde{\boldsymbol{r}}_i}{dt} dt \\
&= \sum_{i=1}^{N} \int_{\boldsymbol{r}_i(t_1)}^{\boldsymbol{r}_i(t_2)} \Big\{ \boldsymbol{F}_i^{ex} \cdot d\boldsymbol{r}_i + \sum_{j=1}^{N} \big(-\frac{m_i}{M} \boldsymbol{F}_j^{ex} + \boldsymbol{F}_{ji}^{in} \big) \cdot d\boldsymbol{r}_i \Big\} \\
&= \sum_{i=1}^{N} \Big\{ W_i^{ex}(t_1 \to t_2) - \overline{W}_i(t_1 \to t_2) + W_i^{in}(t_1 \to t_2) \Big\} \\
&= W^{ex}(t_1 \to t_2) - \overline{W}(t_1 \to t_2) + W^{in}(t_1 \to t_2)
\end{aligned}
\tag{7}
$$

ここで，$\tilde{T}_i$ は i 番目の粒子の相対運動エネルギーであり，$\tilde{T}$ は系全体の相対運動エネルギーとなる。相対運動エネルギーの変化分は，系に対して外力と内力がする仕事から外力の擬仕事を引いたものとなる。また，$\Delta\tilde{T} = \Delta T - \Delta T_G$ を満足する。なお，この式変形において $\tilde{\boldsymbol{r}}_i$ から $\boldsymbol{r}_i$ に移る際に重心座標 $\boldsymbol{r}_G$ がかかる項は全体で相殺していることに注意する。

まとめ

したがって前回示した当初の問いへの答えは次のようになる。

1. 作用点が変位しない外力は，系の重心運動エネルギーの変化に寄与するか？ → **YES**
2. 内力は，系の重心運動エネルギーの変化に寄与するか？ → **NO**

[補足 5] 重心に対する擬仕事が重心運動エネルギーの変化に寄与し，この擬仕事を逆符号にしたものが相対運動エネルギーの変化をもたらす。もし，外力が拘束力だけで，エネルギー発生源が内部にあれば，内力による仕事が相対運動エネルギーの増加に寄与し，拘束力による擬仕事を通じて相対運動エネルギーの減少と重心運動エネルギーの増加がもたらされる。後藤さんは『外力が拘束力を含む場合にも重心に対する「擬仕事」を重心に対する「仕事」と呼称して良い』と主張しているのであって，言葉の定義をどうするかを共通に了解できれば問題は解消する。

[補足 6] ⊂ 字軌道あるいは ∪ 字軌道の例題は，前者（桑原モデル）は運動中の内力 $= 0$ であり，後者（後藤モデル）は内力 $\neq 0$ である。いずれも，拘束力が円軌道上の粒子に仕事をしないにもかかわらず，重心は「擬仕事」または「仕事（後藤さん）」によって運動エネルギーを獲得するという設定であり，本質的に異なった問題ではない。「擬仕事」の役割や効果（相対運動から重心運動への運動エネルギーの転化）は内力の存在とは関係がないからである。なお，運動エネルギーはベクトルではないので，円軌道で粒子に働く拘束力によってその運動の方向が変わったことを重心運動エネルギー増加の根拠にすることはできない。

これを具体的なモデルで表してみよう。

2　一定の外力と内力が働く２体問題

図 1 のように座標 $x_1(t)$ にある質量 m_1 の粒子 1 と座標 $x_2(t)$ にある質量 m_2 の粒子 2 からなる 1 次元の 2 体問題を考える。粒子 1 には外力 F_1 と内力 $-f_1$ が，粒子 2 には外力 F_2 と内力 f_2 が働いている。内力に対して作用反作用の法則が成り立てば $f_1 = f_2 = f$ であるが，ここでは力の作用点を明確にするため，計算過程では区別したまま表記する。これにより，添字によって力が働いている粒子（位置）を区別できる。また，す

べての力は定数であるとする。このとき運動方程式は

$$\begin{cases} m_1\ddot{x}_1 = F_1 - f_1 \\ m_2\ddot{x}_2 = F_2 + f_2 \end{cases} \tag{8}$$

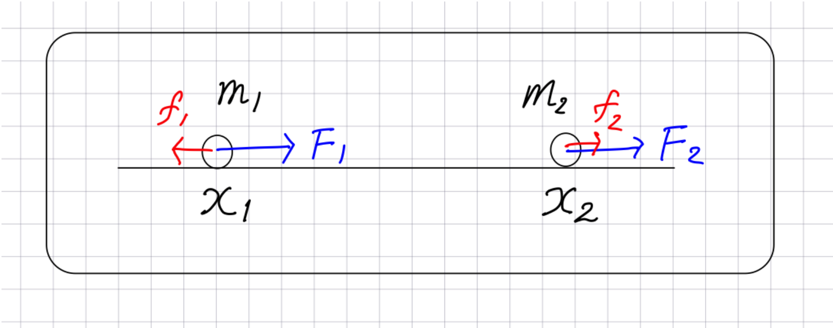

図 1

重心座標と相対座標を次のように定義する。

$$\begin{cases} x_G = (m_1x_1 + m_2x_2)/M \\ \quad x = x_2 - x_1 \end{cases} \tag{9}$$

重心運動と相対運動の運動方程式は，全質量を $M = m_1 + m_2$，換算質量を $\mu = \dfrac{m_1m_2}{M}$ として，

$$\begin{cases} M\ddot{x}_G = F_1 + F_2 - f_1 + f_2 \\ \quad \mu\ddot{x} = \dfrac{m_1}{M}(F_2 + f_2) - \dfrac{m_2}{M}(F_1 - f_1) \end{cases} \tag{10}$$

一定の力が働くため各粒子は等加速度運動をしている。時刻 t_1 から t_2 までの間に粒子 1 は $\ell_1 = x_1(t_2) - x_1(t_1)$ まで変位し，粒子 2 は $\ell_2 = x_2(t_2) - x_2(t_1)$ だけ変位したとする。系全体の運動エネルギー変化の表式は，粒子 1 と粒子 2 に対するすべての力による仕事の和となる。

$$\Delta T = (F_1 - f_1)\ell_1 + (F_2 + f_2)\ell_2 = (F_1\ell_1 + F_2\ell_2) + f(\ell_2 - \ell_1) \tag{11}$$

重心運動のエネルギー変化の表式は，重心に対する擬仕事により，

$$\Delta T_G = (F_1 - f_1 + F_2 + f_2)\left(\frac{m_1\ell_1 + m_2\ell_2}{M}\right) = (F_1 + F_2)\left(\frac{m_1\ell_1 + m_2\ell_2}{M}\right) \tag{12}$$

相対運動エネルギーの変化の表式は，一般の多粒子系の場合とは相対座標の定義が異っているので，(10) の相対運動の運動方程式の両辺に相対速度 $\dot{x}$ をかけて時間で積分した結果から，

$$\Delta\tilde{T} = \left\{\frac{m_1}{M}(F_2 + f_2) - \frac{m_2}{M}(F_1 - f_1)\right\}(\ell_2 - \ell_1) = \left(\frac{m_1F_2 - m_2F_1}{M} + f\right)(\ell_2 - \ell_1) \tag{13}$$

これらは，$\Delta T = \Delta T_G + \Delta\tilde{T}$ を満足している。$F_1\ell_1$ のように力と変位の添字が同一の積は通常の仕事の定義と同じであるが，$F_2\ell_1$ のように添字が異っている量は仕事ではなく擬仕事に対応している。したがって，重心運動と相対運動に分離したときにはそれぞれに擬仕事の項が現れ，両者を加えると仕事の項のみが残る。

[補足 7] この例において粒子 1 に $F_1 = f_1$ の条件を加えて固定し，$\ell_1 = 0$ とすれば，擬仕事の項を消去して外力 F_2 と内力 f_2 による仕事だけで各運動エネルギーの変化を表すことは可能であるが，これは 2 体系が単純だからにすぎない。3 体系以上で 1 点のみ固定点が存在する場合には，必ず擬仕事が現れ，外力と内力の仕事だけで重心運動エネルギー変化を記述することはできない。例えば 1 次元の 3 体系で粒子 1 が $F_1^{ex} + F_{21}^{in} + F_{31}^{in} = 0$ で固定され $\ell_1 = 0$ の場合，$\Delta T_G = (F_2^{ex} + F_{12}^{in} + F_3^{ex} + F_{13}^{in})(m_2\ell_2 + m_3\ell_3)/M$ となり，擬仕事が現れる。