続々・重心の運動エネルギーはどこからくるの？

ver. 1.0　2017 年 3 月 6 日　越 桐 國 雄

1　前回までのまとめ

物体に働く力と，その力が物体にする仕事や物体の力学的エネルギーの関係を調べたい。このため，物体を外力と内力が働く多粒子系としてモデル化してその運動を考えよう。多粒子系の運動を重心運動と相対運動に分離し，それぞれの運動エネルギーの変化と力や仕事との関係を整理した結果，次のようになった。

【外力と内力を含む多粒子系の運動方程式】

質量 m_i で位置ベクトルが $\boldsymbol{r}_i$ である N 個の粒子からなる多粒子系を考える。i 番目の粒子には外力 $\boldsymbol{F}_i^{ex}$ 及び $j(\neq i)$ 番目の粒子との間の内力 $\boldsymbol{F}_{ji}^{in}$ が働く。このとき，この系および重心の運動方程式はそれぞれ次のようになる。ただし，$M=\sum_{i=1}^N m_i$ はこの系の全質量であり，$\boldsymbol{r}_G$ は重心座標である。

$$m_i\frac{d^2\boldsymbol{r}_i}{dt^2}=\boldsymbol{F}_i=\boldsymbol{F}_i^{ex}+\sum_{j=1}^N\boldsymbol{F}_{ji}^{in}\quad(i=1\cdots N),\qquad M\frac{d^2\boldsymbol{r}_G}{dt^2}=\sum_{i=1}^N\boldsymbol{F}_i^{ex}=\boldsymbol{F}^{ex}\tag{1}$$

また，i 番目の粒子の相対運動の運動方程式は次式で与えられる。なお，この系の重心座標 $\boldsymbol{r}_G$ と重心から見た相対座標 $\tilde{\boldsymbol{r}}_i$ を次のように定義している。

$$m_i\frac{d^2\tilde{\boldsymbol{r}}_i}{dt^2}=\boldsymbol{F}_i^{ex}+\sum_{j=1}^N\big(-\frac{m_i}{M}\boldsymbol{F}_j^{ex}+\boldsymbol{F}_{ji}^{in}\big),\qquad \boldsymbol{r}_G=\sum_{i=1}^N\frac{m_i\boldsymbol{r}_i}{M},\quad \tilde{\boldsymbol{r}}_i=\boldsymbol{r}_i-\boldsymbol{r}_G\tag{2}$$

【多粒子系の運動エネルギーの定義】

全系の運動エネルギーを T，相対運動の運動エネルギーを $\tilde{T}$，重心運動の運動エネルギーを T_G とする。

$$T=\sum_{i=1}^N T_i=\sum_{i=1}^N\frac{m_i}{2}\Big(\frac{d\boldsymbol{r}_i}{dt}\Big)^2,\quad \tilde{T}=\sum_{i=1}^N\tilde{T}_i=\sum_{i=1}^N\frac{m_i}{2}\Big(\frac{d\tilde{\boldsymbol{r}}_i}{dt}\Big)^2,\quad T_G=\frac{M}{2}\Big(\frac{d\boldsymbol{r}_G}{dt}\Big)^2=T-\tilde{T}\tag{3}$$

ここで，T_i は i 番目の粒子の運動エネルギー，$\tilde{T}_i$ は i 番目の粒子の重心からみた相対運動エネルギーを表し，運動エネルギーに対して，T(全系の運動) $=T_G$(重心運動) $+\tilde{T}$(相対運動) の関係が成り立っている。

【多粒子系の外力及び内力による仕事の定義】

外力や内力が時刻 t_1 から t_2 まで作用しているとき，全系に対して外力のする仕事を $W^{ex}(t_1\to t_2)$，内力のする仕事を $W^{in}(t_1\to t_2)$，<u>重心 $\boldsymbol{r}_G$ に対して外力の和 $\boldsymbol{F}^{ex}$ がする「仕事」を $\overline{W}_G(t_1\to t_2)$ とする。</u>

$$\begin{aligned}
W^{ex}(t_1\to t_2)&=\sum_{i=1}^N W_i^{ex}(t_1\to t_2)=\sum_{i=1}^N\int_{\boldsymbol{r}_i(t_1)}^{\boldsymbol{r}_i(t_2)}\boldsymbol{F}_i^{ex}\cdot d\boldsymbol{r}_i\\
W^{in}(t_1\to t_2)&=\sum_{i=1}^N W_i^{in}(t_1\to t_2)=\sum_{i=1}^N\int_{\boldsymbol{r}_i(t_1)}^{\boldsymbol{r}_i(t_2)}\sum_{j=1}^N\boldsymbol{F}_{ji}^{in}\cdot d\boldsymbol{r}_i\\
\overline{W}_G(t_1\to t_2)&=\sum_{i=1}^N\overline{W}_i(t_1\to t_2)=\sum_{i=1}^N\int_{\boldsymbol{r}_i(t_1)}^{\boldsymbol{r}_i(t_2)}\big(\sum_{j=1}^N\boldsymbol{F}_j^{ex}\big)\cdot\frac{m_i d\boldsymbol{r}_i}{M}=\int_{\boldsymbol{r}_G(t_1)}^{\boldsymbol{r}_G(t_2)}\boldsymbol{F}^{ex}\cdot d\boldsymbol{r}_G
\end{aligned}\tag{4}$$

$W_i^{ex}(t_1 \to t_2)$ と $W_i^{in}(t_1 \to t_2)$ はそれぞれ外力と内力が i 番目の粒子に対してする仕事を表している。一方，**「重心に対して外力の和がする仕事」**$\overline{W}_G(t_1 \to t_2)$ は，i 番目の粒子に対する **「外力の擬仕事 (pseudo-work)」** $\overline{W}_i(t_1 \to t_2)$ の和として表せる。$\overline{W}_i(t_1 \to t_2)$ を擬仕事とよんだのは，微視的にみれば $j(\neq i)$ 番目の粒子に働く力と i 番目の粒子の変位の積が現れ，通常の仕事の定義とは異なるからである。

[補足 1]　$\overline{W}_G(t_1 \to t_2)$ は，一般の仕事が**粒子に働く力と粒子の座標の線積分で表現**されているのと同様に，系の**重心に働く力と重心の座標の線積分で表現**されていることから，「仕事」とよぶことは不自然ではないが，混乱をさけるために，**「重心に対して外力の和がする仕事」**とよび，これを各粒子の寄与に分解して考える際にはその各項を**「外力の擬仕事 (pseudo-work)」**とよぶことにする。

【運動エネルギーの変化と仕事の関係】

系の全運動エネルギーの変化 ΔT は，全系に対して外力と内力のする仕事の和 $W^{ex}+W^{in}$ に等しい。

$$
\begin{aligned}
\Delta T(t_1 \to t_2) &= T(t_2) - T(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} \frac{dT}{dt}dt \\
&= \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^{N} m_i \frac{d^2\boldsymbol{r}_i}{dt^2}\cdot\frac{d\boldsymbol{r}_i}{dt}dt = \int_{t_1}^{t_2}\sum_{i=1}^{N}\big(\boldsymbol{F}_i^{ex} + \sum_{j=1}^{N}\boldsymbol{F}_{ji}^{in}\big)\cdot\frac{d\boldsymbol{r}_i}{dt}dt \\
&= \sum_{i=1}^{N}\int_{\boldsymbol{r}_i(t_1)}^{\boldsymbol{r}_i(t_2)}\Big\{\boldsymbol{F}_i^{ex}\cdot d\boldsymbol{r}_i + \sum_{j=1}^{N}\boldsymbol{F}_{ji}^{in}\cdot d\boldsymbol{r}_i\Big\} \\
&= W^{ex}(t_1 \to t_2) + W^{in}(t_1 \to t_2)
\end{aligned}
\tag{5}
$$

一方，相対運動エネルギーの変化 $\Delta\tilde{T}$ は，全系に対して外力と内力のする仕事の和 $W^{ex}+W^{in}$ から，**「重心に対して外力の和がする仕事」**$\overline{W}_G$ を引いたものに等しい。

$$
\begin{aligned}
\Delta\tilde{T}(t_1 \to t_2) &= \tilde{T}(t_2) - \tilde{T}(t_1) = \int_{t_1}^{t_2}\frac{d\tilde{T}}{dt}dt \\
&= \int_{t_1}^{t_2}\sum_{i=1}^{N} m_i\frac{d^2\tilde{\boldsymbol{r}}_i}{dt^2}\cdot\frac{d\tilde{\boldsymbol{r}}_i}{dt}dt = \int_{t_1}^{t_2}\sum_{i=1}^{N}\Big\{\boldsymbol{F}_i^{ex} + \sum_{j=1}^{N}\big(-\frac{m_i}{M}\boldsymbol{F}_j^{ex} + \boldsymbol{F}_{ji}^{in}\big)\Big\}\cdot\frac{d\tilde{\boldsymbol{r}}_i}{dt}dt \\
&= \sum_{i=1}^{N}\int_{\boldsymbol{r}_i(t_1)}^{\boldsymbol{r}_i(t_2)}\Big\{\boldsymbol{F}_i^{ex}\cdot d\boldsymbol{r}_i + \sum_{j=1}^{N}\big(-\frac{m_i}{M}\boldsymbol{F}_j^{ex} + \boldsymbol{F}_{ji}^{in}\big)\cdot d\boldsymbol{r}_i\Big\} \\
&= W^{ex}(t_1 \to t_2) - \overline{W}_G(t_1 \to t_2) + W^{in}(t_1 \to t_2)
\end{aligned}
\tag{6}
$$

(注)(6) 式の変形において $d\tilde{\boldsymbol{r}}_i = d\boldsymbol{r}_i - d\boldsymbol{r}_G$ の重心座標の項は，粒子の和を取ることでキャンセルする 。

また，重心運動エネルギーの変化 ΔT_G は，**「重心に対して外力の和がする仕事」**$\overline{W}_G$ に等しい。

$$
\begin{aligned}
\Delta T_G(t_1 \to t_2) &= T_G(t_2) - T_G(t_1) = \int_{t_1}^{t_2}\frac{dT_G}{dt}dt \\
&= \int_{t_1}^{t_2} M\frac{d^2\boldsymbol{r}_G}{dt^2}\cdot\frac{d\boldsymbol{r}_G}{dt}dt = \int_{t_1}^{t_2}\boldsymbol{F}^{ex}\cdot\frac{d\boldsymbol{r}_G}{dt}dt = \int_{\boldsymbol{r}_G(t_1)}^{\boldsymbol{r}_G(t_2)}\boldsymbol{F}^{ex}\cdot d\boldsymbol{r}_G \\
&= \int_{t_1}^{t_2}\Big(\sum_{j=1}^{N}\boldsymbol{F}_j^{ex}\Big)\cdot\Big(\sum_{i=1}^{N}\frac{m_i}{M}\frac{d\boldsymbol{r}_i}{dt}\Big)dt = \sum_{i=1}^{N}\int_{\boldsymbol{r}_i(t_1)}^{\boldsymbol{r}_i(t_2)}\Big(\sum_{j=1}^{N}\boldsymbol{F}_j^{ex}\Big)\cdot\frac{m_i d\boldsymbol{r}_i}{M} \\
&= \overline{W}_G(t_1 \to t_2) = \Delta T(t_1 \to t_2) - \Delta\tilde{T}(t_1 \to t_2)
\end{aligned}
\tag{7}
$$

まとめ

1. **多粒子系の全運動エネルギーの変化 ΔT は，外力と内力のする仕事の和に等しい**
2. **多粒子系の相対運動エネルギーの変化 $\Delta\tilde{T}$ には，外力と内力のする仕事がともに含まれる**
3. **多粒子系の重心運動エネルギーの変化 ΔT_G には，内力のする仕事が含まれない**
4. **「重心に対して外力の和がする仕事」$\overline{W}_G$ は，$\Delta\tilde{T}$ と ΔT_G に逆符号で現れる**
5. **$\overline{W}_G$ を各粒子の寄与に分けて考えるとき，擬仕事 (pseudo-work) の概念が必要になる**

（注）系の i 番目の粒子に対する外力の擬仕事を $\overline{W}_i = \int_{\boldsymbol{r}_i(t_1)}^{\boldsymbol{r}_i(t_2)} \left(\sum_{j=1}^{N} \boldsymbol{F}_j^{ex}\right) \cdot \frac{m_i d\boldsymbol{r}_i}{M}$ で定義する

2　議論になっているのは何か？

物理教育メーリングリスト（per-ml）における最近の議論（2017 年以降）を簡単に要約してみる。

（1）2 月 14/15 日に後藤さんは，仕事の定義を以下に示す定義Ａと定義Ｂに整理し，それぞれが近似ではなく厳密な定義であるとした上で，重心運動に対する仕事は定義Ａで扱われるべきであるとした。また，重心に対して定義Ｂを適用したことが，そもそも不要な概念である擬仕事（pseudo work）の導入を招き混乱を生じさせているとしている。そこで，重心運動については定義Ａを，系全体については定義Ｂを用い，適切に使い分ければ問題ないと主張している。

後藤さんによる仕事の定義

1. 定義Ａ：仕事＝物体に働く力 × 重心の移動距離
2. 定義Ｂ：仕事＝物体に働く力 × 力の作用点の移動距離

（2）これに対して，2 月 20 日に桑原さんが，仕事の本来の定義は 1 質点に対する定義Ｂであって，定義Ａはこれをもとに導かれる派生的な定義式であるとした。系の内部エネルギーの変化などは定義Ａでは説明できないことから，仕事を定義する場合，物理学の立場としてより普遍的で適用範囲が広いものを出発点として考えるのが望ましいと主張している。

（3）2 月 22 日に鈴木さんは，後藤さんの主張する定義Ａの表現は高等学校の教科書には存在しておらず，教科書の図の表現においても作用点の移動距離として示されていることから，定義Ｂが正しい理解であるとした（例えば，実教出版の高校物理基礎では，「物体に力 F を加えてその向きに x 動かしたとき，その力のした仕事 W は，$W = Fx$ で表される」として定義している）。

（4）2 月 25 日には岩崎さんが，このスレッドではないものの，ニュアンスが近い話題として，階段を登る人や重量挙げをする人を例にあげて何が仕事をしているのかを問うている。

後藤さんも桑原さんも，相対運動エネルギーの変化を含む系全体のエネルギー変化を説明するには定義Ｂが必要であることは合意している。そこで，問題は重心運動の運動エネルギーの変化を説明するために，定義Ａを用いることの必要性や，仕事の定義が一意的でないことの妥当性だと思われる。

後藤さんが２つの定義にこだわるのは，カンダタが蜘蛛の糸を登る際の仕事の問題が出発点になっている。そのポイントは，このときに力がカンダタにした仕事は，カンダタの手に加わる蜘蛛の糸の束縛力であって筋力ではないという主張であり，これを理解するには，定義Ａを用いるのが一番簡単で素直な説明（擬仕事の概念が不要）であるということだと思われる。そこで次に，カンダタが蜘蛛の糸を登る現象をモデル化して，さきほどの一般の関係式を当てはめることで理解を深めてみよう。

3　蜘蛛の糸を登るカンダタのモデル

3.1　カンダタのモデル

カンダタが蜘蛛の糸を登るモデルを次のように考える。蜘蛛の糸は鉛直方向に張られている。これを x 軸とし，極楽側を正の向き，地獄側を負の向きにとる。地球は地獄側に存在しているものとする。カンダタを構成する粒子１と粒子２は蜘蛛の糸に沿って鉛直方向に１次元の運動をすることができる。

カンダタのモデル

1. 系＝自然長 a，バネ定数 k のバネの上端に粒子１と下端に粒子２をつける（質量 m_i）
2. 外力１＝蜘蛛の糸による粒子に対する束縛力（R_i）
3. 外力２＝カンダタに働く重力（$-m_ig$）
4. 内力１＝筋力のモデルとして粒子１と粒子２に働くバネの弾性力（$-kx_i$）
5. 内力２＝筋力のモデルとして粒子１と粒子２の間で短時間に働く一定の撃力（f）

ここで，外力１（束縛力）と内力２（撃力）は非保存力，外力２（重力）と内力１（弾性力）は保存力であることに注意する。また，内力２（撃力）がなければカンダタは上昇を続けることができない。

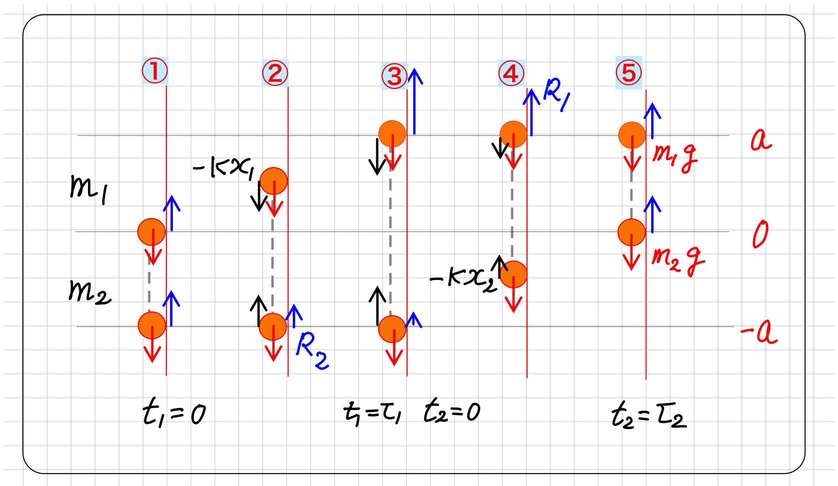

図 1

カンダタが蜘蛛の糸を登る運動の過程は図１のようになる。粒子１の座標を $x_1(t_1)$，粒子２の座標を $x_2(t_2)$ とする。静止状態にあったカンダタが，下端の粒子２を固定したまま内力 f によって上に運動を始める。粒子間を結ぶバネの伸びが a になったところで静止する。次にカンダタは，上端の粒子１を固定したまま内力 f によって再び上に運動を始める。粒子間を結ぶバネがの長さが自然長になったところで静止すると，カンダタは最初の状態に比べて先ほどのバネの伸び a の分だけ上に移動することになる。

① **始状態** ($t_1 < 0$)：粒子 1 は $x_1 = 0$，粒子 2 は $x_2 = -a$ で静止している。粒子 i には重力 $-m_i g$ と束縛力 $R_i = m_i g$ が働く。バネの長さは自然長 a のため弾性力は 0 である。

② **粒子 1 が上昇する状態** ($0 \le t_1 \le \tau_1$)：粒子 1 は $t_1 = 0$ から Δt_1 の間だけ上向きに力 f を受け初速度 $\dot{x}_1(\Delta t_1 \approx 0) = f\Delta t_1/m_1 = v_1$ で上昇する。粒子 2 は束縛力 R_2 によって固定されている。粒子 1 は重力＋弾性力により減速し，$x_1(\tau_1) = a$ の位置で速度 $\dot{x}_1(\tau_1) = 0$ となって静止する。

③ **休憩状態** ($\tau_1 < t_1$； $t_2 < 0$)：バネが自然長に比べて a だけ伸びているため弾性力の大きさは ka となり，粒子 1 に $R_1 = m_1 g + ka$，粒子 2 に $R_2 = m_2 g - ka$ の束縛力が働く。

④ **粒子 2 が上昇する状態** ($0 \le t_2 \le \tau_2$)：粒子 2 は $t_2 = 0$ から Δt_2 の間だけ上向きに力 f を受け初速度 $\dot{x}_2(\Delta t_2 \approx 0) = f\Delta t_2/m_2 = v_2$ で上昇する。粒子 1 は束縛力 R_1 によって固定されている。粒子 2 は重力−弾性力により減速し，$x_2(\tau_2) = 0$ の位置で速度 $\dot{x}_2(\tau_2) = 0$ となって静止する。

⑤ **終状態** ($\tau_2 < t_2$)：粒子 1 は $x_1 = a$，粒子 2 は $x_2 = 0$ で静止している。粒子 i には重力 $-m_i g$ と束縛力 $R_i = m_i g$ が働く。バネの長さは自然長 a のため弾性力は 0 である。

3.2 カンダタの運動

まず②の状態におけるカンダタの運動を求める。粒子 1 の運動方程式とその解は次のようになる。

$$
\begin{aligned}
m_1 \frac{d^2 x_1(t_1)}{dt_1^2} &= -k x_1(t_1) - m_1 g, \qquad x_1(0) = 0, \quad \dot{x}_1(0) = v_1 \\
\frac{d^2 x_1(t_1)}{dt_1^2} &= -\omega_1^2 x_1(t_1) - g, \qquad \omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m_1}} \\
x_1(t_1) &= \frac{g}{\omega_1^2}\bigl(\cos\omega_1 t_1 - 1\bigr) + \frac{v_1}{\omega_1}\sin\omega_1 t_1 \\
\dot{x}_1(t_1) &= -\frac{g}{\omega_1}\sin\omega_1 t_1 + v_1\cos\omega_1 t_1, \qquad \dot{x}_1(\tau_1) = 0, \quad \tan\omega_1\tau_1 = \frac{v_1\omega_1}{g}
\end{aligned}
\tag{8}
$$

これから，②の状態における束縛力 $R_2(t_1)$ を求める。ただし，f は $0 \to \Delta t_1$ の微小時間だけ作用する。

$$
\begin{aligned}
R_2(t_1) &= m_2 g - k x_1(t_1) - f \\
&= m_2 g - \frac{kg}{\omega_1^2}\Bigl\{\bigl(\cos\omega_1 t_1 - 1\bigr) + \frac{v_1\omega_1}{g}\sin\omega_1 t_1\Bigr\} - f \\
&= (m_1 + m_2)g - m_1 g\bigl(\cos\omega_1 t_1 + \tan\omega_1\tau_1\sin\omega_1 t_1\bigr) - f
\end{aligned}
\tag{9}
$$

次に④の状態におけるカンダタの運動を求める。粒子 2 の運動方程式とその解は次のようになる。
ただし，簡単のため，$\underline{m_2 g = ka\ (g = a\omega_2^2)}$という条件（③の状態において $R_2 = 0$ に設定）を用いることにする。

$$
\begin{aligned}
m_2 \frac{d^2 x_2(t_2)}{dt_2^2} &= -k x_2(t_2) - m_2 g, \qquad x_2(0) = -a, \quad \dot{x}_2(0) = v_2 \\
\frac{d^2 x_2(t_2)}{dt_2^2} &= -\omega_2^2 x_2(t_2) - g, \qquad \omega_2 = \sqrt{\frac{k}{m_2}} \\
x_2(t_2) &= \frac{g}{\omega_2^2}\bigl(\cos\omega_2 t_2 - 1\bigr) + \frac{v_2}{\omega_2}\sin\omega_2 t_2 - a\cos\omega_2 t_2 \\
&= -a + \frac{v_2}{\omega_2}\sin\omega_2 t_2 \\
\dot{x}_2(t_2) &= v_2\cos\omega_2 t_2, \qquad \dot{x}_2(\tau_2) = 0, \quad \tau_2 = \frac{\pi}{2\omega_2}
\end{aligned}
\tag{10}
$$

これから，④の状態における束縛力 $R_1(t_2)$ を求める。ただし，f は $0 \to \Delta t_2$ の微小時間だけ作用する。

$$\begin{aligned} R_1(t_2) &= m_1 g - kx_2(t_2) + f \\ &= m_1 g + m_2 g\Big(1 - \frac{v_2\omega_2}{g}\sin\omega_2 t_2\Big) + f \\ &= (m_1+m_2)g - m_2 v_2 \omega_2 \sin\omega_2 t_2 + f \end{aligned} \tag{11}$$

3.3　初速度に対する条件

カンダタの上昇運動の鍵となるのは内力 f で実現する粒子の初速度 v_i である。カンダタの運動過程の説明で示したように，速度 $v_i = f\Delta t/m_i$ で上昇した粒子 i は，バネが一定の長さになったところで速度 $v_i = 0$ になるという条件をつけた。つまり，①の始状態で静止していたカンダタは，③の休憩状態でも静止し，⑤の終状態でも静止することになる。したがって，系の全運動エネルギーに対する次の関係式が成り立つ。ただし，T と W^{ex}, W^{in} の添字 i は $i = 1$ が粒子 1 が上昇する②の状態，$i = 2$ が粒子 2 が上昇する④の状態で各物理量を計算することに対応している。

$$\begin{aligned} \Delta T_1(0 \to \tau_1) = T_1(\tau_1) - T_1(0) = W_1^{ex}(0 \to \tau_1) + W_1^{in}(0 \to \tau_1) = 0 \\ \Delta T_2(0 \to \tau_2) = T_2(\tau_2) - T_2(0) = W_2^{ex}(0 \to \tau_2) + W_2^{in}(0 \to \tau_2) = 0 \end{aligned} \tag{12}$$

まず，②における外力の仕事 $W_1^{ex}(0 \to \tau_1) + W_1^{in}(0 \to \tau_1)$ を求める。

$$\begin{aligned} W_1^{ex}(0 \to \tau_1) &= \int_0^a (-m_1 g)dx_1 = -m_1 g a \\ W_1^{in}(0 \to \tau_1) &= \int_0^a (-kx_1)dx_1 + \int_0^{\Delta t_1} f \cdot \big(\frac{f}{m_1}t_1\big)\ dt_1 = -\frac{ka^2}{2} + \frac{m_1 v_1^2}{2} \end{aligned} \tag{13}$$

ただし，撃力 f のする仕事においては，等加速度運動を仮定し，$v_1 = f\Delta t_1/m_1$ という関係式を用いた。

次に，④における外力の仕事 $W_2^{ex}(0 \to \tau_2) + W_2^{in}(0 \to \tau_2)$ を求める。

$$\begin{aligned} W_2^{ex}(0 \to \tau_2) &= \int_{-a}^0 (-m_2 g)dx_2 = -m_2 g a \\ W_2^{in}(0 \to \tau_2) &= \int_{-a}^0 (-kx_2)dx_2 + \int_0^{\Delta t_2} f \cdot \big(\frac{f}{m_2}t_2\big)\ dt_2 = \frac{ka^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} \end{aligned} \tag{14}$$

ただし，撃力 f のする仕事においては，等加速度運動を仮定し，$v_2 = f\Delta t_2/m_2$ という関係式を用いた。
(12)，(13)，(14) から v_1 と v_2 を求め，先ほどの条件 $m_2 g = ka$ を用いると次のようになる。

$$\begin{aligned} v_1^2 =& 2ga + \frac{ka^2}{m_1} = 2ga + (a\omega_1)^2 = ga\Big(2 + \frac{m_2}{m_1}\Big) \\ v_2^2 =& 2ga - \frac{ka^2}{m_2} = 2ga - (a\omega_2)^2 = ga \end{aligned} \tag{15}$$

3.4　重心運動エネルギーと $\overline{W}_G$

重心運動エネルギーの変化 ΔT_G と，「**重心に対して外力の和がする仕事**」$\overline{W}_G$ の関係を，このモデルの③から④における上昇過程にあてはめて確かめてみる。

まず，③から④における**重心の運動エネルギー変化** ΔT_G を求めると，

$$\begin{aligned}\Delta T_G(0\to t) =&T_G(t)-T_G(0)=\frac{M}{2}\Big(\frac{m_1\dot{x}_1+m_2\dot{x}_2}{M}\Big)^2-0\\ =&\frac{m_2^2}{2M}\dot{x}_2{}^2=\frac{m_2^2}{2M}(v_2\cos\omega_2 t)^2=\frac{(m_2v_2)^2}{2M}\cos^2\omega_2 t\end{aligned} \tag{16}$$

次に，③から④における**「重心に対して外力の和がする仕事」** $\overline{W}_G$ を求めると，

$$\begin{aligned}\overline{W}_G(0\to t)=&\int_0^t F^{ex}\cdot\dot{x}_G\ dt_2=\int_0^t\Big(R_1(t_2)-m_1g-m_2g\Big)\cdot\dot{x}_G(t_2)dt_2\\ =&\int_0^t\big(-m_2v_2\omega_2\sin\omega_2t_2+f\big)\cdot\frac{m_2}{M}\dot{x}_2(t_2)dt_2\\ =&-\frac{(m_2v_2)^2\omega_2}{M}\int_0^t\sin\omega_2t_2\cos\omega_2t_2dt_2+\int_0^{\Delta t_2}f\cdot\frac{m_2}{M}\frac{ft_2}{m_2}dt_2\\ =&-\frac{(m_2v_2)^2\omega_2}{2M}\int_0^t\sin 2\omega_2t_2dt_2+\frac{(m_2v_2)^2}{2M}\\ =&\frac{(m_2v_2)^2}{2M}\frac{1}{2}\big(\cos 2\omega_2t-1\big)+\frac{(m_2v_2)^2}{2M}=\frac{(m_2v_2)^2}{2M}\cos^2\omega_2t\end{aligned} \tag{17}$$

したがって，$\Delta T_G(0\to t)=\overline{W}_G(0\to t)$ がこのカンダタモデルの場合にも成立していることが具体的に確かめられた。つまり，カンダタの**重心の運動エネルギーの変化分**は，カンダタの**「重心に対して外力の和がする仕事」**に等しく，この外力の和にはカンダタに働く束縛力が含まれる。

3.5 おまけと結論

前節の結論を導いた際に用いたカンダタの粒子 1 に働く束縛力 $R_1(t_2)$ と外力の和は，次のようにも表現することができる。

$$\begin{aligned}\overline{W}_G(0\to t)=&\int_0^t F^{ex}\cdot\dot{x}_G\ dt_2=\int_0^t\Big(R_1(t_2)-Mg\Big)\cdot\dot{x}_G(t_2)dt_2\\ =&\int_0^t\big(-kx_2(t_2)+f-m_2g\big)\cdot\frac{m_2}{M}\dot{x}_2(t_2)dt_2\\ =&\frac{m_2}{M}\Big(W_2^{in}(0\to t)+W_2^{ex}(0\to t)\Big)\end{aligned} \tag{18}$$

このことから，系の重心の運動エネルギーの変化を説明するために，「重心に対する外力の和がする仕事」や「外力による擬仕事」の概念は必要なく，各粒子に対して外力がする仕事や内力がする仕事の組み合わせで説明できるように思われるかもしれない。

しかし，これは，今回のカンダタのモデルが 2 粒子系であったことの特殊性による。例えば，2 粒子系で想定した状況をそのまま拡張した 3 粒子系のカンダタのモデルを採用すると運動方程式は以下のようになる。ただし，粒子 1 を束縛力 R_1 で蜘蛛の糸に固定した場合を考えている。

$$\begin{aligned}m_1\frac{d^2x_1}{dt^2}&=-k(x_1-x_2-a)-f_1-m_1g+R_1=0\\ m_2\frac{d^2x_2}{dt^2}&=k(x_1-x_2-a)+f_1-k(x_2-x_3-a)-f_2-m_2g\\ m_3\frac{d^2x_3}{dt^2}&=k(x_2-x_3-a)+f_2-m_3g\end{aligned} \tag{19}$$

これから，重心の運動エネルギーの変化 ΔT_G を求めると，

$$
\begin{aligned}
\Delta T_G(t_1 \to t_2) &= \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt}\frac{M}{2}\Big(\frac{m_1\dot{x}_1 + m_2\dot{x}_2 + m_3\dot{x}_3}{M}\Big)^2 dt \\
&= \int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{2M}\frac{d}{dt}\big(m_2\dot{x}_2 + m_3\dot{x}_3\big)^2 dt \\
&= \int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{M}(m_2\ddot{x}_2 + m_3\ddot{x}_3)(m_2\dot{x}_2 + m_3\dot{x}_3)dt \\
&= \int_{x_2(t_1)}^{x_2(t_2)} \frac{m_2}{M}\big\{k(x_1 - x_2 - a) + f_1 - m_2 g - m_3 g\big\}dx_2 \\
&\quad + \int_{x_3(t_1)}^{x_3(t_2)} \frac{m_3}{M}\big\{k(x_1 - x_2 - a) + f_1 - m_2 g - m_3 g\big\}dx_3
\end{aligned} \tag{20}
$$

ここで，粒子 2 と粒子 3 の間に働く内力は打ち消しあっていることに注意する。一方，粒子 2 と粒子 3 に対する外力及び内力による仕事は以下のようになる。

$$
\begin{aligned}
W_2^{ex}(t_1 \to t_2) &= \int_{x_2(t_1)}^{x_2(t_2)} (-m_2 g)dx_2 \\
W_3^{ex}(t_1 \to t_2) &= \int_{x_3(t_1)}^{x_3(t_2)} (-m_3 g)dx_3 \\
W_2^{in}(t_1 \to t_2) &= \int_{x_2(t_1)}^{x_2(t_2)} \{k(x_1 - x_2 - a) + f_1 - k(x_2 - x_3 - a) - f_2\}dx_2 \\
W_3^{in}(t_1 \to t_2) &= \int_{x_3(t_1)}^{x_3(t_2)} \{k(x_2 - x_3 - a) + f_2\}dx_3
\end{aligned} \tag{21}
$$

（21）式の仕事の各項を分解して組み合わせても，（20）式の $\Delta T_G(t_1 \to t_2)$ を構成することはできない。すなわち，重心の運動エネルギー変化における次の項は粒子 2 と粒子 3 に対する外力あるいは内力による仕事によって表すことはできない。

$$
\int_{x_2(t_1)}^{x_2(t_2)} (-m_3 g)dx_2, \quad \int_{x_3(t_1)}^{x_3(t_2)} (-m_2 g)dx_3, \quad \int_{x_3(t_1)}^{x_3(t_2)} (f_1)dx_3, \quad \int_{x_3(t_1)}^{x_3(t_2)} (kx_1)dx_3 \tag{22}
$$

まとめ：物体（カンダタ）を多粒子系によってモデル化する場合

1. 重心運動エネルギーの変化は「重心に対して外力の和がする仕事」によって説明できる
2. 「重心に対して外力の和がする仕事」は各粒子に分解すると「擬仕事」の和として表現できる
3. 各粒子に関して定義された「仕事」だけでは重心運動エネルギーの変化を説明することはできない

従って，結論としては，カンダタが蜘蛛の糸を登る際の重心運動は「カンダタの筋力（内力）がする仕事」では説明できないが，「重心に対して外力の和（束縛力含む）がする仕事」で説明することができる（これを各粒子への外力からの寄与に分解して考える場合には「擬仕事」という概念が必要になる），ということになる。