再・重心の運動エネルギーはどこからくるの？

ver. 1.0　 2017 年 3 月 18 日　越 桐 國 雄

1　前回までのまとめ（再掲）

物体に働く力と，その力が物体にする仕事や物体の力学的エネルギーの関係を調べたい。このため，物体を外力と内力が働く多粒子系としてモデル化してその運動を考えよう。多粒子系の運動を重心運動と相対運動に分離し，それぞれの運動エネルギーの変化と力や仕事との関係を整理した結果，次のようになった。

【外力と内力を含む多粒子系の運動方程式】

質量 m_i で位置ベクトルが $\boldsymbol{r}_i$ である N 個の粒子からなる多粒子系を考える。i 番目の粒子には外力 $\boldsymbol{F}_i^{ex}$ 及び $j(\neq i)$ 番目の粒子との間の内力 $\boldsymbol{F}_{ji}^{in}$ が働く。このとき，この系および重心の運動方程式はそれぞれ次のようになる。ただし，$M=\sum_{i=1}^N m_i$ はこの系の全質量であり，$\boldsymbol{r}_G$ は重心座標である。

$$m_i\frac{d^2\boldsymbol{r}_i}{dt^2}=\boldsymbol{F}_i=\boldsymbol{F}_i^{ex}+\sum_{j=1}^N\boldsymbol{F}_{ji}^{in}\quad(i=1\cdots N),\qquad M\frac{d^2\boldsymbol{r}_G}{dt^2}=\sum_{i=1}^N\boldsymbol{F}_i^{ex}=\boldsymbol{F}^{ex}\tag{1}$$

また，i 番目の粒子の相対運動の運動方程式は次式で与えられる。なお，この系の重心座標 $\boldsymbol{r}_G$ と重心から見た相対座標 $\tilde{\boldsymbol{r}}_i$ を次のように定義している。

$$m_i\frac{d^2\tilde{\boldsymbol{r}}_i}{dt^2}=\boldsymbol{F}_i^{ex}+\sum_{j=1}^N\left(-\frac{m_i}{M}\boldsymbol{F}_j^{ex}+\boldsymbol{F}_{ji}^{in}\right),\qquad \boldsymbol{r}_G=\sum_{i=1}^N\frac{m_i\boldsymbol{r}_i}{M},\quad \tilde{\boldsymbol{r}}_i=\boldsymbol{r}_i-\boldsymbol{r}_G\tag{2}$$

【多粒子系の運動エネルギーの定義】

全系の運動エネルギーを T，相対運動の運動エネルギーを $\tilde{T}$，重心運動の運動エネルギーを T_G とする。

$$T=\sum_{i=1}^N T_i=\sum_{i=1}^N\frac{m_i}{2}\left(\frac{d\boldsymbol{r}_i}{dt}\right)^2,\quad \tilde{T}=\sum_{i=1}^N\tilde{T}_i=\sum_{i=1}^N\frac{m_i}{2}\left(\frac{d\tilde{\boldsymbol{r}}_i}{dt}\right)^2,\quad T_G=\frac{M}{2}\left(\frac{d\boldsymbol{r}_G}{dt}\right)^2=T-\tilde{T}\tag{3}$$

ここで，T_i は i 番目の粒子の運動エネルギー，$\tilde{T}_i$ は i 番目の粒子の重心からみた相対運動エネルギーを表し，運動エネルギーに対して，$T(\text{全系の運動})=T_G(\text{重心運動})+\tilde{T}(\text{相対運動})$ の関係が成り立っている。

【多粒子系の外力及び内力による仕事の定義】

外力や内力が時刻 t_1 から t_2 まで作用しているとき，全系に対して外力のする仕事を $W^{ex}(t_1\to t_2)$，内力のする仕事を $W^{in}(t_1\to t_2)$，<u>重心 $\boldsymbol{r}_G$ に対して外力の和 $\boldsymbol{F}^{ex}$ がする「仕事」を $\overline{W}_G(t_1\to t_2)$ とする。</u>

$$\begin{aligned}
W^{ex}(t_1\to t_2)&=\sum_{i=1}^N W_i^{ex}(t_1\to t_2)=\sum_{i=1}^N\int_{\boldsymbol{r}_i(t_1)}^{\boldsymbol{r}_i(t_2)}\boldsymbol{F}_i^{ex}\cdot d\boldsymbol{r}_i\\
W^{in}(t_1\to t_2)&=\sum_{i=1}^N W_i^{in}(t_1\to t_2)=\sum_{i=1}^N\int_{\boldsymbol{r}_i(t_1)}^{\boldsymbol{r}_i(t_2)}\sum_{j=1}^N\boldsymbol{F}_{ji}^{in}\cdot d\boldsymbol{r}_i\\
\overline{W}_G(t_1\to t_2)&=\sum_{i=1}^N\overline{W}_i(t_1\to t_2)=\sum_{i=1}^N\int_{\boldsymbol{r}_i(t_1)}^{\boldsymbol{r}_i(t_2)}\left(\sum_{j=1}^N\boldsymbol{F}_j^{ex}\right)\cdot\frac{m_i d\boldsymbol{r}_i}{M}=\int_{\boldsymbol{r}_G(t_1)}^{\boldsymbol{r}_G(t_2)}\boldsymbol{F}^{ex}\cdot d\boldsymbol{r}_G
\end{aligned}\tag{4}$$

$W_i^{ex}(t_1 \to t_2)$ と $W_i^{in}(t_1 \to t_2)$ はそれぞれ外力と内力が i 番目の粒子に対してする仕事を表している。一方，**「重心に対して外力の和がする仕事」**$\overline{W}_G(t_1 \to t_2)$ は，i 番目の粒子に対する **「外力の擬仕事 (pseudo-work)」** $\overline{W}_i(t_1 \to t_2)$ の和として表せる。$\overline{W}_i(t_1 \to t_2)$ を擬仕事とよんだのは，微視的にみれば $j(\neq i)$ 番目の粒子に働く力と i 番目の粒子の変位の積が現れ，通常の仕事の定義とは異なるからである。

[補足１]　$\overline{W}_G(t_1 \to t_2)$ は，一般の仕事が**粒子に働く力と粒子の座標の線積分で表現**されているのと同様に，系の**重心に働く力と重心の座標の線積分で表現**されていることから，**「仕事」**とよぶことは不自然ではないが，混乱をさけるために，**「重心に対して外力の和がする仕事」**とよび，これを各粒子の寄与に分解して考える際にはその各項を**「外力の擬仕事 (pseudo-work)」**とよぶことにする。

【運動エネルギーの変化と仕事の関係】

系の全運動エネルギーの変化 ΔT は，全系に対して外力と内力のする仕事の和 $W^{ex} + W^{in}$ に等しい。

$$
\begin{aligned}
\Delta T(t_1 \to t_2) &= T(t_2) - T(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} \frac{dT}{dt} dt \\
&= \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^{N} m_i \frac{d^2 \boldsymbol{r}_i}{dt^2} \cdot \frac{d\boldsymbol{r}_i}{dt} dt = \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^{N} \big(\boldsymbol{F}_i^{ex} + \sum_{j=1}^{N} \boldsymbol{F}_{ji}^{in} \big) \cdot \frac{d\boldsymbol{r}_i}{dt} dt \\
&= \sum_{i=1}^{N} \int_{\boldsymbol{r}_i(t_1)}^{\boldsymbol{r}_i(t_2)} \Big\{ \boldsymbol{F}_i^{ex} \cdot d\boldsymbol{r}_i + \sum_{j=1}^{N} \boldsymbol{F}_{ji}^{in} \cdot d\boldsymbol{r}_i \Big\} \\
&= W^{ex}(t_1 \to t_2) + W^{in}(t_1 \to t_2)
\end{aligned} \tag{5}
$$

一方，相対運動エネルギーの変化 $\Delta \tilde{T}$ は，全系に対して外力と内力のする仕事の和 $W^{ex} + W^{in}$ から，**「重心に対して外力の和がする仕事」**$\overline{W}_G$ を引いたものに等しい。

$$
\begin{aligned}
\Delta \tilde{T}(t_1 \to t_2) &= \tilde{T}(t_2) - \tilde{T}(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} \frac{d\tilde{T}}{dt} dt \\
&= \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^{N} m_i \frac{d^2 \tilde{\boldsymbol{r}}_i}{dt^2} \cdot \frac{d\tilde{\boldsymbol{r}}_i}{dt} dt = \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^{N} \Big\{ \boldsymbol{F}_i^{ex} + \sum_{j=1}^{N} \big(-\frac{m_i}{M} \boldsymbol{F}_j^{ex} + \boldsymbol{F}_{ji}^{in} \big) \Big\} \cdot \frac{d\tilde{\boldsymbol{r}}_i}{dt} dt \\
&= \sum_{i=1}^{N} \int_{\boldsymbol{r}_i(t_1)}^{\boldsymbol{r}_i(t_2)} \Big\{ \boldsymbol{F}_i^{ex} \cdot d\boldsymbol{r}_i + \sum_{j=1}^{N} \big(-\frac{m_i}{M} \boldsymbol{F}_j^{ex} + \boldsymbol{F}_{ji}^{in} \big) \cdot d\boldsymbol{r}_i \Big\} \\
&= W^{ex}(t_1 \to t_2) - \overline{W}_G(t_1 \to t_2) + W^{in}(t_1 \to t_2)
\end{aligned} \tag{6}
$$

(注)(6) 式の変形において $d\tilde{\boldsymbol{r}}_i = d\boldsymbol{r}_i - d\boldsymbol{r}_G$ の重心座標の項は，粒子の和を取ることでキャンセルする 。

また，重心運動エネルギーの変化 ΔT_G は，**「重心に対して外力の和がする仕事」**$\overline{W}_G$ に等しい。

$$
\begin{aligned}
\Delta T_G(t_1 \to t_2) &= T_G(t_2) - T_G(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} \frac{dT_G}{dt} dt \\
&= \int_{t_1}^{t_2} M \frac{d^2 \boldsymbol{r}_G}{dt^2} \cdot \frac{d\boldsymbol{r}_G}{dt} dt = \int_{t_1}^{t_2} \boldsymbol{F}^{ex} \cdot \frac{d\boldsymbol{r}_G}{dt} dt = \int_{\boldsymbol{r}_G(t_1)}^{\boldsymbol{r}_G(t_2)} \boldsymbol{F}^{ex} \cdot d\boldsymbol{r}_G \\
&= \int_{t_1}^{t_2} \Big(\sum_{j=1}^{N} \boldsymbol{F}_j^{ex} \Big) \cdot \Big(\sum_{i=1}^{N} \frac{m_i}{M} \frac{d\boldsymbol{r}_i}{dt} \Big) dt = \sum_{i=1}^{N} \int_{\boldsymbol{r}_i(t_1)}^{\boldsymbol{r}_i(t_2)} \Big(\sum_{j=1}^{N} \boldsymbol{F}_j^{ex} \Big) \cdot \frac{m_i d\boldsymbol{r}_i}{M} \\
&= \overline{W}_G(t_1 \to t_2) = \Delta T(t_1 \to t_2) - \Delta \tilde{T}(t_1 \to t_2)
\end{aligned} \tag{7}
$$

まとめ

1. 多粒子系の全運動エネルギーの変化 ΔT は，外力と内力のする仕事の和に等しい
2. 多粒子系の相対運動エネルギーの変化 $\Delta\tilde{T}$ には，外力と内力のする仕事がともに含まれる
3. 多粒子系の重心運動エネルギーの変化 ΔT_G には，内力のする仕事が含まれない
4. 「重心に対して外力の和がする仕事」$\overline{W}_G$ は，$\Delta\tilde{T}$ と ΔT_G に逆符号で現れる
5. $\overline{W}_G$ を各粒子の寄与に分けて考えるとき，擬仕事 (pseudo-work) の概念が必要になる

（注）系の i 番目の粒子に対する外力の擬仕事を $\overline{W}_i = \int_{\boldsymbol{r}_i(t_1)}^{\boldsymbol{r}_i(t_2)} \left(\sum_{j=1}^{N} \boldsymbol{F}_j^{ex}\right) \cdot \dfrac{m_i d\boldsymbol{r}_i}{M}$ で定義する

2　議論になっているのは何か？（再掲＋更新）

物理教育メーリングリスト（per-ml）における最近の議論（2017 年以降）を簡単に要約してみる。

（１）2 月 14/15 日に後藤さんは，仕事の定義を以下に示す定義Ａと定義Ｂに整理し，それぞれが近似ではなく厳密な定義であるとした上で，重心運動に対する仕事は定義Ａで扱われるべきであるとした。また，重心に対して定義Ｂを適用したことが，そもそも不要な概念である擬仕事（pseudo work）の導入を招き混乱を生じさせているとしている。そこで，重心運動については定義Ａを，系全体については定義Ｂを用い，適切に使い分ければ問題ないと主張している。

後藤さんによる仕事の定義

1. 定義Ａ：仕事＝物体に働く力 × 重心の移動距離
2. 定義Ｂ：仕事＝物体に働く力 × 力の作用点の移動距離

（２）これに対して，2 月 20 日に桑原さんが，仕事の本来の定義は 1 質点に対する定義Ｂであって，定義Ａはこれをもとに導かれる派生的な定義式であるとした。系の内部エネルギーの変化などは定義Ａでは説明できないことから，仕事を定義する場合，物理学の立場としてより普遍的で適用範囲が広いものを出発点として考えるのが望ましいと主張している。

（３）2 月 22 日に鈴木さんは，後藤さんの主張する定義Ａの表現は高等学校の教科書には存在しておらず，教科書の図の表現においても作用点の移動距離として示されていることから，定義Ｂが正しい理解であるとした（例えば，実教出版の高校物理基礎では，「物体に力 F を加えてその向きに x 動かしたとき，その力のした仕事 W は，$W = Fx$ で表される」として定義している）。

（４）2 月 25 日には岩崎さんが，このスレッドではないものの，ニュアンスが近い話題として，階段を登る人や重量挙げをする人を例にあげて何が仕事をしているのかを問うている。

後藤さんも桑原さんも，相対運動エネルギーの変化を含む系全体のエネルギー変化を説明するには定義Ｂが必要であることは合意している。そこで，問題は重心運動の運動エネルギーの変化を説明するために，定義Ａを用いることの必要性や，仕事の定義が一意的でないことの妥当性だと思われる。

（５）3 月 6 日に越桐が，昨年の説明の追加として「続々・重心の運動エネルギーはどこからくるの？」を公開した。定義Ａを「重心に対して外力の和がする仕事」とよぶこと，定義Ａの「仕事」を各要素（質点）に分解して説明するときは「外力による擬仕事の概念」が必要であると主張した。

（６）3 月 13 日に後藤さんが，重心の運動エネルギーを説明するための「擬仕事（pseudo-work)」の考え方は間違っているとして，「仕事とりかえばや物語（http://atsuko.boo.jp/kumonoito/)」を公開した。

（７）3 月 14 日に桑原さんが，越桐の結論のひとつ「各粒子に関して定義された仕事だけでは重心運動エネルギーの変化を説明することはできない。」について疑義を表明して，定義Ａを導入しなくても定義Ｂだけで，一貫した力学体系を作ることができる（重心の運動エネルギーに関する説明はできる）と主張した。

3　桑原さんのモデル

桑原さんのモデルは計算が簡単で見通しがよいので，このモデルを用いながら，N 粒子系に一般化して考える。質量 m_i の i 番目の粒子は 1 次元の x 軸上を運動するものとし，その座標を $x_i(t)$，速度を $\dot{x}_i(t)$ とする。i 番目の粒子には j 番目の粒子から粒子の座標に依存しない一定の大きさの内力 F_{ji} が働く。これは非保存力であるが作用反作用の法則を満足するので，逆に j 番目の粒子には i 番目の粒子から一定の大きさの内力 $F_{ij} = -F_{ji}$ が働く。座標軸の原点に壁があり，外力としては原点に固定される粒子の壁による束縛力 R だけを考える。ここで検証することは以下のとおりである。

桑原さんのモデルで確かめたいこと

1. 各粒子の運動方程式を解いて重心の運動を求め，「重心の運動エネルギーの変化」と「外力の和が重心にした仕事（定義Ａに相当する)」の関係を確認する。
2. 「重心の運動エネルギーの変化」を「各粒子に対して働く力のする仕事（定義Ｂに相当する)」によって表現することができるかどうかを確認する。

ただし，N 粒子系の重心（質量 $M = \sum_{i=1}^{N} m_i$）の座標，速度，運動エネルギーは次のように定義される。

$$x_G(t) = \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i x_i(t)}{M}, \quad \dot{x}_G(t) = \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i \dot{x}_i(t)}{M}, \qquad T_G(t) = \frac{M}{2}\dot{x}_G(t)^2 \tag{8}$$

3.1　２粒子系の場合

まず，各粒子の運動方程式を解いて重心の運動を求め，「重心の運動エネルギーの変化」と「外力の和が重心にした仕事（定義Ａに相当する)」の関係を確認する。

質量 m_1 の粒子 1 は，束縛力によって原点に置かれた壁に固定されている。質量 m_2 の粒子 2 は，初期条件を $x_2(0) = d, \dot{x}_2(0) = 0$ として，粒子 1 から受ける内力 $f_2(= F_{12})$ によって x 軸正方向に等加速度運動をす

る。このとき，粒子１，２の運動方程式とその解は次のようになる。

$$\begin{cases} m_1\ddot{x}_1(t) = R - f_2 & \to x_1(t) = 0, \quad \dot{x}_1(t) = 0, \quad \therefore R = f_2 \\ m_2\ddot{x}_2(t) = f_2 & \to x_2(t) = \dfrac{f_2}{2m_2}t^2 + d, \quad \dot{x}_2(t) = \dfrac{f_2}{m_2}t \end{cases} \tag{9}$$

これから重心の座標 $x_G(t)$，速度 $\dot{x}_G(t)$，運動エネルギー $T_G(t)$ を求めると，

$$x_G(t) = x_G(0) + \frac{f_2}{2M}t^2, \quad \dot{x}_G(t) = \frac{f_2}{M}t, \quad T_G(t) = \frac{f_2^2}{2M}t^2 \tag{10}$$

そこで，「重心の運動エネルギーの変化」$\Delta T_G(0 \to t)$ 及び「外力の和が重心にする仕事」$\overline{W}_G(0 \to t)$ は，

$$\begin{aligned} \Delta T_G(0 \to t) &= T_G(t) - T_G(0) = \frac{f_2^2}{2M}t^2 \\ \overline{W}_G(0 \to t) &= R \cdot (x_G(t) - x_G(0)) = f_2 \cdot \frac{f_2}{2M}t^2 \end{aligned} \tag{11}$$

つまり，「重心の運動エネルギーの変化」は「外力の和（この場合は束縛力 R）が重心にする仕事」に等しい。

次に，これを定義Ｂの仕事で表現してみる。粒子２に対して内力 f_2 がする仕事 $W_2^{in}(0 \to t)$ は，

$$W_2^{in}(0 \to t) = f_2 \cdot (x_2(t) - x_2(0)) = f_2 \cdot \frac{f_2}{2m_2}t^2 \tag{12}$$

すなわち，$\Delta T_G(0 \to t) = \dfrac{m_2}{M}W_2^{in}(0 \to t)$ となる。桑原さんの指摘どおり，重心の運動エネルギーの変化は定義Ｂの仕事だけで説明できる。つまり，「重心に対して外力のする仕事（粒子２に対しては擬仕事)」を持ち出す必要はない。内力 f_2 が粒子２にする仕事の残りは系の相対運動エネルギーの増加に使われる。

3.2　３粒子系の場合

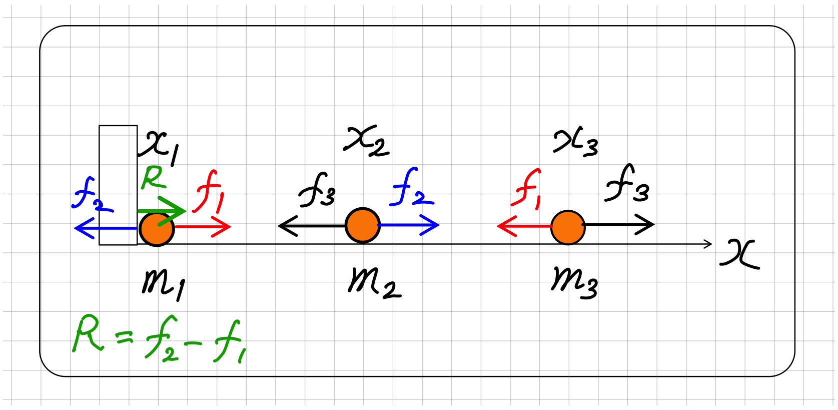

図１

次に図１のように，原点からみて粒子２より遠方に質量 m_3 の粒子３を置き，粒子３が粒子２から受ける内力を $f_3(= F_{23})$，粒子１が粒子３から受ける内力を $f_1(= F_{31})$ とする。粒子１と粒子２の初期条件や外力 R はさきほどと同じであり，粒子３の初期条件は，$x_3(0) = 2d$，$\dot{x}_3(0) = 0$ として，粒子２と粒子３がそれぞれ

等加速度運動をする。このとき，粒子１，２，３の運動方程式とその解は次のようになる。

$$\begin{cases} m_1\ddot{x}_1(t) = R + f_1 - f_2 \\ m_2\ddot{x}_2(t) = f_2 - f_3 \\ m_3\ddot{x}_3(t) = f_3 - f_1 \end{cases} \quad \begin{aligned} &\to x_1(t) = R + f_1 - f_2 = 0,\ \ \dot{x}_1(t) = 0, \quad \therefore R = f_2 - f_1 \\ &\to x_2(t) = \frac{f_2 - f_3}{2m_2}t^2 + d,\ \ \dot{x}_2(t) = \frac{f_2 - f_3}{m_2}t \\ &\to x_3(t) = \frac{f_3 - f_1}{2m_3}t^2 + 2d,\ \ \dot{x}_3(t) = \frac{f_3 - f_1}{m_3}t \end{aligned} \tag{13}$$

これから重心の座標 $x_G(t)$，速度 $\dot{x}_G(t)$，運動エネルギー $T_G(t)$ を求めると，

$$x_G(t) = x_G(0) + \frac{f_2 - f_1}{2M}t^2,\ \ \dot{x}_G(t) = \frac{f_2 - f_1}{M}t, \quad T_G(t) = \frac{(f_2 - f_1)^2}{2M}t^2 \tag{14}$$

そこで,「重心の運動エネルギーの変化」$\Delta T_G(0 \to t)$ 及び「外力の和が重心にする仕事」$\overline{W}_G(0 \to t)$ は，

$$\begin{aligned} \Delta T_G(0 \to t) &= T_G(t) - T_G(0) = \frac{(f_2 - f_1)^2}{2M}t^2 \\ \overline{W}_G(0 \to t) &= R \cdot (x_G(t) - x_G(0)) = (f_2 - f_1) \cdot \frac{(f_2 - f_1)}{2M}t^2 \end{aligned} \tag{15}$$

つまり，「重心の運動エネルギーの変化」は「外力の和（この場合は束縛力 R）が重心にする仕事」に等しい。

<u>次に，これを定義Bの仕事で表現してみよう。</u>粒子２に対して内力 $f_p(p = 2, 3)$ がする仕事 $W^{in}_{2p}(0 \to t)$ と粒子３に対して内力 $f_q(q = 3, 1)$ がする仕事 $W^{in}_{3q}(0 \to t)$ は，符号を別にしてそれぞれ，

$$\begin{aligned} W^{in}_{2p}(0 \to t) &= f_p \cdot (x_2(t) - x_2(0)) = f_p \cdot \frac{f_2 - f_3}{2m_2}t^2 \\ W^{in}_{3q}(0 \to t) &= f_q \cdot (x_3(t) - x_3(0)) = f_q \cdot \frac{f_3 - f_1}{2m_3}t^2 \end{aligned} \tag{16}$$

これらを組み合わせて，$f_2 \cdot f_3$ と $f_3 \cdot f_1$ が含まれる項を消去する。簡単のために $(0 \to t)$ を省略して，

$$\begin{aligned} \frac{m_2}{M}\left(W^{in}_{22} + W^{in}_{23}\right) &= \frac{f_2^2 - f_3^2}{2M}t^2 \\ \frac{m_3}{M}\left(W^{in}_{33} + W^{in}_{31}\right) &= \frac{f_3^2 - f_1^2}{2M}t^2 \end{aligned} \tag{17}$$

式（17）の辺々を加えると f_3^2 の項が打ち消しあい，

$$\frac{m_2}{M}\left(W^{in}_{22} + W^{in}_{23}\right) + \frac{m_3}{M}\left(W^{in}_{33} + W^{in}_{31}\right) = \frac{f_2^2 - f_1^2}{2M}t^2 \neq \frac{(f_2 - f_1)^2}{2M}t^2 \tag{18}$$

つまり，この３粒子系における内力の仕事に各粒子の質量比をかけたものの和から，重心の運動エネルギーの変化を構成することはできない。

[補足]　もちろん，内力のする仕事 $W^{in}_{kl}(0 \to t)$ に対して，任意の内力の比などをかけて線形結合を作ることまで認めれば，重心の運動エネルギー変化を構成する事ができないことはない。しかし，この量に物理的意味を付与することは難しいのではないかと思われる。例えば（18）式の左辺を最右辺と等しくさせるためには，左辺全体に，すなわち粒子３に働く内力からくる仕事 W^{in}_{33} にも $\dfrac{f_2 - f_1}{f_2 + f_1}$ をかける必要があるが，f_2 は粒子３には作用しないので自然な説明が考えにくい。それに比べれば，定義Aを「重心に対して外力の和がする仕事」として説明するほうが簡単である。

3.3　桑原さんのモデルの修正版

前節で補足はしたものの，それでも**重心の運動エネルギーの変化は，各粒子に対して内力や外力がする仕事（定義Ｂ）に適当な係数を掛けたものの和で表現できる**のではないかと思われるかもしれないので，もう 1 つだけ例を考えてみよう。前節の図 1 における粒子 1 と粒子 2 の間に働く一定の力 f_2 を自然長 d，バネ定数 k のバネによる弾性力で置き換える。

$$f_2 \quad\to\quad f_2(t) = -k(x_2(t) - d) \tag{19}$$

その他の設定はまったく同じである。

このとき，粒子 1，２，３の運動方程式とその解は次のようになる。

$$\begin{cases} m_1\ddot{x}_1(t) = R(t) + f_1 + k(x_2(t) - d) \\ m_2\ddot{x}_2(t) = -k(x_2(t) - d) - f_3 \\ m_3\ddot{x}_3(t) = f_3 - f_1 \end{cases} \qquad \begin{aligned} &\to x_1(t) = R(t) + f_1 + k(x_2(t) - d) = 0 \quad \dot{x}_1(t) = 0, \\ &\to x_2(t) = \frac{f_3}{m_2\omega^2}(\cos\omega t - 1) + d, \quad \dot{x}_2(t) = -\frac{f_3}{m_2\omega}\sin\omega t \\ &\to x_3(t) = \frac{f_3 - f_1}{2m_3}t^2 + 2d, \quad \dot{x}_3(t) = \frac{f_3 - f_1}{m_3}t \end{aligned} \tag{20}$$

ここで，$\omega = \sqrt{k/m_2}$ である。また，粒子 1 を原点の壁に固定している束縛力は時間とともに変化し，$R(t) = -f_1 - k(x_2(t) - d) = -f_1 - f_3(\cos\omega t - 1)$ と表される。これから重心の座標 $x_G(t)$，速度 $\dot{x}_G(t)$，運動エネルギー $T_G(t)$ を求めると，時刻 $t = 0$ で重心の静止エネルギーは $T_G(0) = 0$ であるから，

$$\begin{aligned} x_G(t) &= x_G(0) + \frac{1}{M}\Big\{(f_3 - f_1)\frac{t^2}{2} + \frac{f_3}{\omega^2}(\cos\omega t - 1)\Big\} \\ \dot{x}_G(t) &= \frac{1}{M}\Big\{(f_3 - f_1)t - \frac{f_3}{\omega}\sin\omega t\Big\} \\ T_G(t) &= \frac{1}{2M}\Big\{(f_3 - f_1)t - \frac{f_3}{\omega}\sin\omega t\Big\}^2 = \Delta T_G(0 \to t) \end{aligned} \tag{21}$$

また，「重心に対して外力の和がする仕事」$\overline{W}_G(0 \to t)$ は，

$$\begin{aligned} \overline{W}_G(0 \to t) &= \int_0^t R(t) \cdot \dot{x}_G(t) dt \\ &= \int_0^t \Big\{ - f_1 - f_3(\cos\omega t - 1)\Big\} \cdot \frac{1}{M}\Big\{(f_3 - f_1)t - \frac{f_3}{\omega}\sin\omega t\Big\}dt \\ &= \frac{1}{M}\int_0^t \Big\{(f_3 - f_1) - f_3\cos\omega t\Big\} \cdot \Big\{(f_3 - f_1)t - \frac{f_3}{\omega}\sin\omega t\Big\}dt \\ &= \frac{1}{2M}\Big\{(f_3 - f_1)t - \frac{f_3}{\omega}\sin\omega t\Big\}^2 \end{aligned} \tag{22}$$

つまり，「重心の運動エネルギーの変化」$\Delta T_G(0 \to t)$ は「外力の和（この場合は束縛力 R）が重心にする仕事」$\overline{W}_G(0 \to t)$ に一致することが確かめられた。

次に，これを定義Ｂの仕事で表現してみよう。粒子 2 に対して内力 $f_p (p = 2, 3)$ がする仕事 $W_{2p}^{in}(0 \to t)$ と

粒子 3 に対して内力 $f_q(q=3,1)$ がする仕事 $W^{in}_{3q}(0\to t)$ は $f_{1,3}(t)=f_{1,3}$ として，以下のようになる。

$$
\begin{aligned}
W^{in}_{2p}(0\to t) &= \int_0^t f_p(t)\cdot \dot{x}_2(t)dt \\
W^{in}_{3q}(0\to t) &= \int_0^t f_q(t)\cdot \dot{x}_3(t)dt
\end{aligned}
\tag{23}
$$

このモデルでは，符号は別にして内力に関する 4 つの仕事が現れる。以下では $(0\to t)$ を省略する。

$$
\begin{aligned}
W^{in}_{22} &= \int_0^t \Big\{-f_1 - f_3\big(\cos\omega t-1\big)\Big\}\cdot\big(-\frac{f_3}{m_2\omega}\sin\omega t\big)dt = \frac{(f_3-f_1)f_3}{m_2\omega^2}(\cos\omega t-1)+\frac{f_3^2}{2m_2\omega^2}\sin^2\omega t \\
W^{in}_{23} &= \int_0^t f_3\cdot\big(-\frac{f_3}{m_2\omega}\sin\omega t\big)dt = \frac{f_3^2}{m_2\omega^2}(\cos\omega t-1) \\
W^{in}_{33} &= \int_0^t f_3\cdot\frac{f_3-f_1}{m_3}tdt = \frac{f_3(f_3-f_1)}{2m_3}t^2 \\
W^{in}_{31} &= \int_0^t f_1\cdot\frac{f_3-f_1}{m_3}tdt = \frac{f_1(f_3-f_1)}{2m_3}t^2
\end{aligned}
\tag{24}
$$

これらを組み合わせて，ΔT_G の構成を試みると，例えば，

$$
\begin{aligned}
\frac{m_2}{M}\Big(W^{in}_{22}-\frac{f_3-f_1}{f_3}W^{in}_{23}\Big) &= \frac{1}{2M}\Big(\frac{f_3}{\omega}\sin\omega t\Big)^2 \\
\frac{m_3}{M}\frac{f_3-f_1}{f_3+f_1}\Big(W^{in}_{33}+W^{in}_{31}\Big) &= \frac{1}{2M}(f_3-f_1)^2t^2
\end{aligned}
\tag{25}
$$

したがって，ΔT_G における，$(\sin\omega t)^2$ に比例する項と t^2 に比例する項とは得られるが，$t\sin\omega t$ に比例する項は W^{in}_{ik} の線形結合からは得られない。つまり，**重心の運動エネルギーの変化は，各粒子に働く内力がする仕事（定義Ｂ）に適当な係数をかけたものの和だけでは表すことができず，定義Ａを用いて表す必要がある。**

3.4 まとめ

まとめ：物体を多粒子系によってモデル化する場合

1. 重心運動エネルギーの変化は「重心に対して外力の和がする仕事」によって説明できる
2. 「重心に対して外力の和がする仕事」は各粒子に分解すると「擬仕事」の和として表現できる
3. 各粒子に関して定義された「仕事」<u>だけ</u>では重心運動エネルギーの変化を説明することはできない

なお，**「重心に対して外力の和がする仕事」$\overline{\boldsymbol{W}}_{\boldsymbol{G}}(\boldsymbol{t_1}\to\boldsymbol{t_2})$ 全体に対しては，擬仕事と呼称する必要はない。**この量は，外力の和の重心座標による線積分の形で表現されているため，通常の仕事の定義と矛盾しないからである。しかしながら，**これを各粒子に働く力に分解して個々の項について議論する場合には，**積分する粒子座標と力が働く粒子座標が異った項が現れ，通常の仕事の定義Ｂには該当しないので，**分解した個々の項を「擬仕事（pseudo-work)」と呼称する必要がある。**