再々・重心の運動エネルギーはどこからくるの？

ver. 1.0　 2017 年 3 月 30 日　越 桐 國 雄

1　はじめに

後藤さんの提起された問題，すなわちカンダタが蜘蛛の糸を手でつかんでよじ登るときに，**カンダタ（系）の重心を持ち上げる仕事をしたのは，筋力（内力）なのか？あるいは糸の張力（外力）なのか？**を巡って議論が進んできました。

糸の張力が手に働いている間は力の作用点（手）が動かないので，糸の張力は手に対して仕事をしないと考えられます。つまり，この作用点（手）における糸の張力がする仕事をとおしてカンダタには外部からエネルギーは流れ込みません。エネルギーの発生源は筋肉の細胞内の物理・化学的過程に帰着し，それゆえ答えは**筋力（内力）がカンダタに対してした仕事であるというのが立場Ａ**です。

これに対して，多粒子系の重心の運動方程式は内力を含まず，外力の和だけからなることから，系の内力が重心の運動や運動エネルギーの原因となるのはおかしいという考えがあります。この場合，**糸の張力（外力）がカンダタの重心に対してした仕事（または擬仕事）が答えであるというのが立場Ｂ**です（擬仕事ということばが必要かどうかは次の段階での課題としておきます)。

この問題を考える際の準備として，いくつかの確認をしておきましょう。変形したり回転したりできる物体に対して働く力と重心の運動の関係を考えたいので，**対象となる物体を有限個の粒子からなる多粒子系で近似し，各粒子はニュートンの運動方程式にしたがうとします**。働く力は系外から各粒子に働く**外力**と系内の粒子間に働く**内力**です。これらは，エネルギー保存則を満足する**保存力**の場合もありますし，そうではない**非保存力**の場合もあります。ただし，**作用反作用の法則は成り立っている**ものとします。

仕事という概念は**「粒子に働く力とその力の働く方向に粒子が動いた距離の積」で定義**します。運動が一様でない場合は線積分で表します。この際，文の主語や目的語を力や粒子として，「力が粒子に対して仕事をする」，「粒子が力によって仕事をされる」，「粒子に対して力がする仕事」などの表現を用い，**粒子の運動エネルギー変化の原因が粒子に働く力にある，すなわち粒子に対して力がする仕事にある**と考えることにします。

外力や内力が保存力の場合は**位置エネルギー**を用いて仕事を表すこともできますが，**説明の道筋を絞るため，以下では位置エネルギーを導入しません**。その代わり，**外力や内力は，それが働く粒子に対して仕事をすることにより粒子の運動エネルギーを変化させるという見方**で統一します。これは保存力に対しても非保存力に対しても成り立ちます。例えば，一様な重力場で粒子をゆっくりと上に持ち上げた場合，粒子の運動エネルギーは変化しませんが，これは粒子に働く上向きの束縛力がする正の仕事と下向きの重力がする負の仕事が打ち消しあってゼロになるためだと考えるわけです。

粒子やこれに働く力は**世界に実際に存在する対象（実在）**であると考えて議論を進めますが，**重心**はどうでしょうか。**重心座標**は各粒子の座標にその粒子の質量と系全体の質量の比を係数としてかけて加えた理論的な

構成物ですが，重心は，外力の和がひとつの力として働くニュートンの運動方程式を満足します。また，運動している物体の各瞬間の形状や向きなどが測定できれば，実験的に重心の運動を求めることができるので，重心の座標，重心の速度，重心の運動エネルギー，重心に働く外力の和なども，先ほど述べた粒子に関する物理量と同じように考えることができます。そこで，「**粒子に対して力がする仕事**」に加えてそれと同じように「**重心に対して外力の和がする仕事**」という量を扱うことにします。

2　１次元の２粒子系の例

（１）原点に置かれた同じ質量 m を持つ粒子１と粒子２の間に内力として一定の大きさの斥力 F が働いています。粒子１と粒子２はそれぞれ x 軸の正方向と負方向に等加速度運動をはじめますが，外力が働かないので重心は静止したままです。したがって，重心運動エネルギーは変化しません。一方，内力 F が粒子１や粒子２にした仕事は，相対運動エネルギーの変化（増加）をもたらします。

（２）次に（１）の設定において粒子１に外力である束縛力 R を加え，内力 F とつり合わせて原点に固定します。粒子２は（１）の場合と同じ運動をします。重心は，原点と粒子２の座標の中点を運動し，重心運動エネルギーは増加します。粒子１は固定されていますので，これに対して働く外力がする仕事と内力がする仕事はともにゼロです。これを２つの立場で表現してみましょう。

【立場Ａ】筋力説

- 内力 F が粒子２にする仕事の一部が原因で重心運動エネルギーが増加した。
- 内力 F が粒子２にする仕事の残りの一部が原因で相対運動エネルギーが増加した。
- 外力 R が粒子１にする仕事は０でありこれは各運動エネルギーの変化には寄与しない。

【立場Ｂ】張力説

- 外力の和（R）が重心に対してする仕事（擬仕事）が原因で重心運動エネルギーが増加した。
- 内力 F が粒子２に対してする仕事から重心運動エネルギーの増加分を引いたものが相対運動エネルギーの増加となった。

この例ではどちらの立場でも仕事と運動エネルギー変化の因果関係を説明できるということになります。そこで，適当なモデルを探して，立場Ａと立場Ｂの優劣を判定できるかどうかを調べたいと思います。

3　問題設定

はじめのカンダタと蜘蛛の糸の話では「**重心がなされた仕事**の原因は何か」という問いが出されましたが，これを，「多粒子系の**重心の運動エネルギー変化**の原因は何か」という風に読みかえます。簡単のため，多粒子系において，粒子１にだけに外力$\boldsymbol{F}_1^{ex}$ ＝束縛力 $\boldsymbol{R}$ が働き，各粒子の間に内力$\boldsymbol{F}_{ji}^{in}$ が働くというモデルを考えることにします。

どちらの立場による説明が妥当でしょうか？

粒子１が束縛力 $\boldsymbol{R}$ で固定された多粒子系を考え，重心の運動エネルギーの変化を ΔT_G とする。

１．立場Ａ：束縛力 $\boldsymbol{R}$ は粒子１に仕事をしないので，ΔT_G は内力が粒子にする仕事で表される。

２．立場Ｂ：ΔT_G は外力の和 $\boldsymbol{R}$ が重心にする仕事（または擬仕事）で表される。

まず，立場Ａでは，重心の運動エネルギーの変化 ΔT_G を，j 番目の粒子から i 番目の粒子に働く内力 $\boldsymbol{F}_{ji}^{in}$ が i 番目の粒子にする仕事 W_{ji}^{in} を用いて表す必要があります。外力である束縛力 $\boldsymbol{R}$ は仕事をしないので考える必要はありません。すなわち，もし次の式が成り立てば，重心の運動エネルギー変化を「内力が粒子にする仕事が原因である」として説明できたことになります。

$$\Delta T_G(t_1 \to t_2) = \sum_{ji} C_{ji} W_{ji}^{in}(t_1 \to t_2) = \sum_{ji} C_{ji} \int_{t_1}^{t_2} \boldsymbol{F}_{ji}^{in} \cdot \frac{d\boldsymbol{r}_i}{dt} dt \tag{1}$$

ただし，C_{ji} は適当な係数であり，等号が成り立つように探し求めたいわけです。

一方，立場Ｂでは，重心に作用する外力の和（i 番目の粒子に作用する外力 $\boldsymbol{F}_i^{ex}$ の和）はこの束縛力 $\boldsymbol{R}$ だけであり，次のように定義される「外力の和が重心に対してする仕事」$\overline{W}_G(0 \to t)$ を求めればよいわけです。

$$\overline{W}_G(t_1 \to t_2) = \int_{\boldsymbol{r}_G(t_1)}^{\boldsymbol{r}_G(t_2)} \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{F}_i^{ex} \cdot d\boldsymbol{r}_G = \sum_{i=1}^{N} \int_{\boldsymbol{r}_i(t_1)}^{\boldsymbol{r}_i(t_2)} \boldsymbol{R} \cdot \frac{m_i d\boldsymbol{r}_i}{M} \tag{2}$$

この量が重心の運動エネルギー変化 $\Delta T_G(t_1 \to t_2)$ に一致することは一般的な証明が済んでいるので (www.osaka-kyoiku.ac.jp/~koshi/per-ml/)，具体的なモデルでの計算はその確認作業になります。

4　１次元の３粒子系の例

ここでは，１次元の３粒子系における２つの例をあげて立場Ａが正しいとはいえないことを示します。

確認の手順

１．各粒子に対する運動方程式を立てます。

２．粒子１の束縛条件から束縛力 R を求めます。

３．運動方程式の積分から，各粒子の速度や速度の二乗などを求めます。

４．重心の運動エネルギーの式から，上の積分を用いて，その変化 ΔT_G を求めます。

５．ΔT_G が「外力の和が重心にする仕事」に等しいことを確かめます（立場Ｂ）。

６．ΔT_G を「内力が粒子にする仕事」に適当な係数をかけた和として表してみます（立場Ａ）。

（注）なお，仕事は，力×変位の積分 のかわりに，力×速度の時間積分 として求めています。

4.1　粒子の座標に依存しない内力が働く場合

1 次元の 3 粒子系に働く内力 $f_k(t)$ が，時間の関数であり粒子の座標に依存しない場合の運動を考えます。

初期状態では同じ質量を m を持つ 3 個の粒子が原点に静止しています。粒子 1 と粒子 3 の間には内力 $f_1(t)$ と $-f_1(t)$ が，粒子 2 と粒子 1 の間には内力 $f_2(t)$ と $-f_2(t)$ が，粒子 3 と粒子 2 の間には内力 $f_3(t)$ と $-f_3(t)$ がそれぞれ働いています。これらの力は時刻 $t=0$ ではゼロであるとします。粒子 1 にはさらに外力 $R(t)$ が働き，この束縛力 $R(t)$ が内力とつり合うことによって原点に固定されています。

これらの粒子に対する運動方程式とその時間積分を求めてみましょう。

$$\begin{cases} m\ddot{x}_1(t) = f_1(t) - f_2(t) + R(t) = 0 & \dot{x}_1(t) = 0, \qquad R(t) = f_2(t) - f_1(t) \\ m\ddot{x}_2(t) = f_2(t) - f_3(t) & \dot{x}_2(t) = F_2(t)/m - F_3(t)/m \\ m\ddot{x}_3(t) = f_3(t) - f_1(t) & \dot{x}_3(t) = F_3(t)/m - F_1(t)/m \end{cases} \tag{3}$$

ここで，力 $f_k(t)$ を時間で積分した力積を $F_k(t)$ としました。

$$F_k(t) = \int_0^t f_k(t)dt, \qquad \dot{F}_k(t) = f_k(t), \qquad F_k(0) = 0 \tag{4}$$

これから，重心の速度と運動エネルギーを求めておきます。系全体の質量を $M=3m$ とします。

$$\begin{aligned} \dot{x}_G(t) &= \frac{m\dot{x}_2(t) + m\dot{x}_3(t)}{M} = \frac{1}{M}\Big\{F_2(t) - F_1(t)\Big\} \\ T_G(t) &= \frac{M}{2}\dot{x}_G(t)^2 = \frac{1}{2M}\Big\{F_2(t) - F_1(t)\Big\}^2 = \Delta T_G(0 \to t) \end{aligned} \tag{5}$$

まず，立場Ｂによる説明のために，「外力の和が重心にする仕事」$\overline{W}_G(0 \to t)$ を求めます。

$$\begin{aligned} \overline{W}_G(0 \to t) &= \int_0^t R(t) \cdot \dot{x}_G(t)dt \\ &= \int_0^t \Big\{f_2(t) - f_1(t)\Big\} \cdot \frac{1}{M}\Big\{F_2(t) - F_1(t)\Big\}dt \\ &= \frac{1}{M}\int_0^t \Big\{\dot{F}_2(t) - \dot{F}_1(t)\Big\} \cdot \Big\{F_2(t) - F_1(t)\Big\}dt \\ &= \frac{1}{2M}\Big\{F_2(t) - F_1(t)\Big\}^2 \end{aligned} \tag{6}$$

このように，「重心の運動エネルギーの変化」$\Delta T_G(0 \to t)$ は「外力の和（この場合は束縛力 $R(t)$）が重心にする仕事」$\overline{W}_G(0 \to t)$ に一致することが確かめられました。これが立場Ｂによる説明になります。

次に，立場Ａによる説明のために，「内力が粒子にする仕事」$W_{ji}^{in}(0 \to t)$ を求めます。
内力 $f_j (j=2,3)$ が粒子 2 にする仕事 $W_{j2}^{in}(0 \to t)$ と内力 $f_j (j=3,1)$ が粒子 3 にする仕事 $W_{j3}^{in}(0 \to t)$ は以下のように表されます（複号は上に示した内力の並び順に対応します)。

$$\begin{aligned} W_{j2}^{in}(0 \to t) &= \int_0^t \pm f_j(t) \cdot \dot{x}_2(t)dt = \int_0^t \pm f_j(t) \cdot \frac{1}{m}\{F_2(t) - F_3(t)\}dt \\ W_{j3}^{in}(0 \to t) &= \int_0^t \pm f_j(t) \cdot \dot{x}_3(t)dt = \int_0^t \pm f_j(t) \cdot \frac{1}{m}\{F_3(t) - F_1(t)\}dt \end{aligned} \tag{7}$$

これから「粒子 i に働く内力の和が粒子 i にする仕事」$W_i^{in}(0\to t)\quad(i=2,3)$ を求めます。

$$
\begin{aligned}
W_2^{in}(0\to t)=W_{22}^{in}(0\to t)+W_{32}^{in}(0\to t)&=\int_0^t\{f_2(t)-f_3(t)\}\cdot\frac{1}{m}\{F_2(t)-F_3(t)\}dt\\
&=\int_0^t\{\dot{F}_2(t)-\dot{F}_3(t)\}\cdot\frac{1}{m}\{F_2(t)-F_3(t)\}dt\\
&=\frac{1}{2m}\Big\{F_2(t)-F_3(t)\Big\}^2\\
W_3^{in}(0\to t)=W_{33}^{in}(0\to t)+W_{13}^{in}(0\to t)&=\int_0^t\{f_3(t)-f_1(t)\}\cdot\frac{1}{m}\{F_3(t)-F_1(t)\}dt\\
&=\int_0^t\{\dot{F}_3(t)-\dot{F}_1(t)\}\cdot\frac{1}{m}\{F_3(t)-F_1(t)\}dt\\
&=\frac{1}{2m}\Big\{F_3(t)-F_1(t)\Big\}^2
\end{aligned}
\tag{8}
$$

これらを組み合わせて，$\Delta T_G(0\to t)$ を求めようとすると，次のようになります。

$$
\begin{aligned}
\sqrt{2mW_2^{in}(0\to t)}=|F_2(t)-F_3(t)|\,,\qquad \sqrt{2mW_3^{in}(0\to t)}=|F_3(t)-F_1(t)|\\
\therefore\Big\{F_2(t)-F_1(t)\Big\}^2=\Big\{\sqrt{2mW_2^{in}(0\to t)}\pm\sqrt{2mW_3^{in}(0\to t)}\Big\}^2
\end{aligned}
\tag{9}
$$

ただし，複号は力積 $F_k(t)$ の大小関係によって調整されるものと理解します。したがって，重心の運動エネルギーの変化を「内力が粒子にする仕事」を用いて表すと，以下の式が得られました。

$$
\begin{aligned}
\Delta T_G(0\to t)&=\frac{1}{2M}\Big\{F_2(t)-F_1(t)\Big\}^2\\
&=\frac{m}{M}\Big\{\sqrt{W_2^{in}(0\to t)}\pm\sqrt{W_3^{in}(0\to t)}\Big\}^2\\
&=\frac{m}{M}\Big\{W_2^{in}(0\to t)+W_3^{in}(0\to t)\pm2\sqrt{W_2^{in}(0\to t)\cdot W_3^{in}(0\to t)}\Big\}
\end{aligned}
\tag{10}
$$

つまり，当初のもくろみのように，**重心の運動エネルギーの変化を「内力が粒子にする仕事」の線形結合としては表すことができない**ことが示されました。例えば，内力による仕事がすべて時間の有理関数で表現されている場合，重心の運動エネルギーも時間の有理関数であることが期待されますが，立場Aでは時間の無理関数をもちこまないと表せないということになってしまうため，この立場は正しくないということになります。

4.2　粒子の座標に依存する内力が働く場合

次に，1次元の3粒子系に，粒子の座標に依存する内力 $f_k(x_i-x_j)$ が働く場合の運動を考えます。

初期状態では同じ質量を m を持つ3個の粒子が<u>一定間隔 d で静止</u>しています。粒子1と粒子3の間には内力 $f_1(x_1-x_3)$ と $-f_1(x_1-x_3)$ が，粒子2と粒子1の間には内力 $f_2(x_2-x_1)$ と $-f_2(x_2-x_1)$ が，粒子3と粒子2の間には内力 $f_3(x_3-x_2)$ と $-f_3(x_3-x_2)$ がそれぞれ働いています。粒子1にはさらに外力 R が働き，この束縛力 R が内力とつり合うことによって原点に固定されています。

これらの粒子に対する運動方程式を求めてみましょう。

$$
\begin{cases}
m\ddot{x}_1(t)=f_1(x_1-x_3)-f_2(x_2-x_1)+R=0, \qquad R=f_2(x_2-x_1)-f_1(x_1-x_3)\\
m\ddot{x}_2(t)=f_2(x_2-x_1)-f_3(x_3-x_2)\\
m\ddot{x}_3(t)=f_3(x_3-x_2)-f_1(x_1-x_3)
\end{cases}
\tag{11}
$$

これから重心の運動エネルギーを求めたいのですが，系全体の質量を $M=3m$ とします。

$$\begin{aligned}\Delta T_G(0\to t) &= T_G(t)-T_G(0)\\ &= \frac{M}{2}\Big\{\frac{m\dot{x}_2(t)+m\dot{x}_3(t)}{M}\Big\}^2\\ &= \frac{m^2}{2M}\Big\{\dot{x}_2(t)^2+2\dot{x}_2(t)\dot{x}_3(t)+\dot{x}_3(t)^2\Big\}\end{aligned} \tag{12}$$

速度の 2 乗や速度の積を求めるために，運動方程式 (11) の両辺に $\dot{x}_k(t)$ をかけて時間で積分します。

$$\begin{aligned}\int_0^t m\ddot{x}_2(t)\dot{x}_2(t)dt &= \int_0^t \Big\{f_2(x_2-x_1)-f_3(x_3-x_2)\Big\}\cdot\dot{x}_2(t)dt\\ \int_0^t m\ddot{x}_3(t)\dot{x}_2(t)dt &= \int_0^t \Big\{f_3(x_3-x_2)-f_1(x_1-x_3)\Big\}\cdot\dot{x}_2(t)dt\\ \int_0^t m\ddot{x}_2(t)\dot{x}_3(t)dt &= \int_0^t \Big\{f_2(x_2-x_1)-f_3(x_3-x_2)\Big\}\cdot\dot{x}_3(t)dt\\ \int_0^t m\ddot{x}_3(t)\dot{x}_3(t)dt &= \int_0^t \Big\{f_3(x_3-x_2)-f_1(x_1-x_3)\Big\}\cdot\dot{x}_3(t)dt\end{aligned} \tag{13}$$

左辺を積分する際に（13）の第 2 式と第 3 式を辺々加えると（14）の第 2 式のようにまとまります。ところで，この第 2 式は第 1 式や第 3 式と違い「**内力が粒子にする仕事**」**の形ではない項** $\overline{w}_k$ **を含む**ことに注意します。

$$\begin{aligned}\frac{m}{2}\dot{x}_2(t)^2 &= \int_0^t \Big\{f_2(x_2-x_1)-f_3(x_3-x_2)\Big\}\cdot\dot{x}_2(t)dt = W_2^{in}(0\to t)\\ m\dot{x}_2(t)\dot{x}_3(t) &= \int_0^t \Big\{f_3(x_3-x_2)-f_1(x_1-x_3)\Big\}\cdot\dot{x}_2(t)dt \sim -W_{32}^{in}(0\to t)+\overline{w}_2\\ &\quad+\int_0^t \Big\{f_2(x_2-x_1)-f_3(x_3-x_2)\Big\}\cdot\dot{x}_3(t)dt \sim \overline{w}_3-W_{23}^{in}(0\to t)\\ \frac{m}{2}\dot{x}_3(t)^2 &= \int_0^t \Big\{f_3(x_3-x_2)-f_1(x_1-x_3)\Big\}\cdot\dot{x}_3(t)dt = W_3^{in}(0\to t)\end{aligned} \tag{14}$$

これをまとめると，重心の運動エネルギーの変化 ΔT_G は以下のように整理できます。これが<u>立場Bの見方</u>になります。

$$\begin{aligned}\Delta T_G(0\to t) &= \frac{m}{M}\Big\{\frac{m}{2}\dot{x}_2(t)^2+m\dot{x}_2(t)\dot{x}_3(t)+\frac{m}{2}\dot{x}_3(t)^2\Big\}\\ &= \frac{m}{M}\int_0^t \big\{f_2(x_2-x_1)-f_1(x_1-x_3)\big\}\cdot\big\{\dot{x}_2(t)+\dot{x}_3(t)\big\}dt\\ &= \int_0^t R\cdot\dot{x}_G(t)dt = \overline{W}_G(0\to t)\end{aligned} \tag{15}$$

一方，<u>立場Aの見方</u>では，

$$\Delta T_G(0\to t) = \frac{m}{M}\Big\{W_2^{in}(0\to t)+W_3^{in}(0\to t)\Big\}-\frac{m}{M}\Big\{W_{32}^{in}(0\to t)+W_{23}^{in}(0\to t)\Big\}+\overline{w}_2+\overline{w}_3 \tag{16}$$

ここで，$\overline{w}_2$ と $\overline{w}_3$ は「**内力が粒子にする仕事として表わせない項**」であり，次のようになります。

$$\overline{w}_2 = -\int_0^t f_1(x_1-x_3)\cdot\dot{x}_2(t)dt, \qquad \overline{w}_3 = \int_0^t f_2(x_2-x_1)\cdot\dot{x}_3(t)dt \tag{17}$$

つまり，**重心の運動エネルギーの変化を**「**内力が各粒子にする仕事**」**の線形結合としては表すことができない**ことがこの場合も示されたことになります。

まとめ

1粒子が外力で束縛された系において，重心の運動エネルギーの変化を「内力が粒子にする仕事」だけで表すことはできません。一方，束縛力によってエネルギーは外部から流入しませんが，「外力の和が重心にする仕事（または擬仕事）」を用いることによって重心の運動エネルギーの変化を表すことができます。

(注) 2粒子系は単純であり条件が強いために ΔT_G を「内力が粒子にする仕事」だけで表すことができます。

5　多粒子系の一般論

前節までの考察をふまえて，多粒子系の「**重心運動のエネルギー変化**」と外力や内力のする「**仕事**」の関係を一般的にまとめてみます。また，その際に「**擬仕事**」の概念の必要性についてもふれます。

5.1　束縛力がない場合

【1】N 粒子系の各粒子の運動方程式を与えます

質量 m_i で位置ベクトルが $\boldsymbol{r}_i$ である N 個の粒子からなる多粒子系を考えます。i 番目の粒子には外力 $\boldsymbol{F}_i^{ex}$ が働き，$j(\neq i)$ 番目の粒子との間には内力 $\boldsymbol{F}_{ji}^{in}$ が働きます。内力は作用反作用の法則を満たします。この系の運動方程式は次のようになります。

$$m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i = \boldsymbol{F}_i^{ex} + \sum_{k=1}^{N}\boldsymbol{F}_{ki}^{in} \qquad (i = 1\cdots N) \tag{18}$$

【2】各粒子の運動方程式に粒子の速度をかけて積分します

あとで重心の運動エネルギーの計算に必要になるので，これらの運動方程式の両辺に粒子の質量と速度をかけて時間で積分したものを用意しておきます。i 番目の粒子の運動方程式に i 番目の粒子の速度と質量をかけたものと，i 番目の粒子の運動方程式に $j(\neq i)$ 番目の粒子の速度と質量をかけたものをそれぞれ求めましょう。

$$\begin{aligned} m_i\dot{\boldsymbol{r}}_i\cdot m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i &= m_i\dot{\boldsymbol{r}}_i\cdot\big(\boldsymbol{F}_i^{ex} + \sum_{k=1}^{N}\boldsymbol{F}_{ki}^{in}\big) \\ \int_{t_1}^{t_2}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\big(m_i\dot{\boldsymbol{r}}_i\big)^2dt &= \int_{t_1}^{t_2}m_i\dot{\boldsymbol{r}}_i\cdot\big(\boldsymbol{F}_i^{ex} + \sum_{k=1}^{N}\boldsymbol{F}_{ki}^{in}\big)dt \end{aligned} \tag{19}$$

$$\begin{gathered} m_j\dot{\boldsymbol{r}}_j\cdot m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i = m_j\dot{\boldsymbol{r}}_j\cdot\big(\boldsymbol{F}_i^{ex} + \sum_{k=1}^{N}\boldsymbol{F}_{ki}^{in}\big), \qquad m_i\dot{\boldsymbol{r}}_i\cdot m_j\ddot{\boldsymbol{r}}_j = m_i\dot{\boldsymbol{r}}_i\cdot\big(\boldsymbol{F}_j^{ex} + \sum_{k=1}^{N}\boldsymbol{F}_{kj}^{in}\big) \\ \int_{t_1}^{t_2}\frac{d}{dt}\big(m_i\dot{\boldsymbol{r}}_i\cdot m_j\dot{\boldsymbol{r}}_j\big)dt = \int_{t_1}^{t_2}\Big\{m_j\dot{\boldsymbol{r}}_j\cdot\big(\boldsymbol{F}_i^{ex} + \sum_{k=1}^{N}\boldsymbol{F}_{ki}^{in}\big) + m_i\dot{\boldsymbol{r}}_i\cdot\big(\boldsymbol{F}_j^{ex} + \sum_{k=1}^{N}\boldsymbol{F}_{kj}^{in}\big)\Big\}dt \end{gathered} \tag{20}$$

普通の運動方程式のエネルギー積分では，（19）式のように，**ある粒子の運動方程式にその粒子の速度をかけて時間で積分した量**が現れますが，ここでは，（20）式のように，**ある粒子の運動方程式に別の粒子の速度をかけて時間で積分した量**が出てくることに注意して下さい。

【3】重心の運動エネルギーとその変化を定義します

系の全質量を $M = \sum_{i=1}^{N} m_i$ として，重心座標 $\boldsymbol{r}_G$ と重心の速度 $\dot{\boldsymbol{r}}_G$，重心の運動エネルギー $T_G(t)$，重心の

運動エネルギーの変化 $T_G(t_1 \to t_2)$ はそれぞれ次のように定義されます。

$$\begin{aligned} \boldsymbol{r}_G &= \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i \boldsymbol{r}_i}{M}, \quad \dot{\boldsymbol{r}}_G = \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i \dot{\boldsymbol{r}}_i}{M} \\ T_G(t) &= \frac{M}{2} \dot{\boldsymbol{r}}_G^2 = \frac{1}{2M} \big(\sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\boldsymbol{r}}_i \big)^2 = \frac{1}{2M} \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} m_i \dot{\boldsymbol{r}}_i \cdot m_j \dot{\boldsymbol{r}}_j \\ \Delta T_G(t_1 \to t_2) &= T_G(t_2) - T_G(t_1) \end{aligned} \tag{21}$$

以下では簡単のために，初期条件としてすべての粒子は時刻 0 で静止している ($\dot{\boldsymbol{r}}_i(0) = 0$) とします。そのうえで，重心運動エネルギーの変化として，$\Delta T_G(0 \to t) = T_G(t) - T_G(0) = T_G(t)$ について考えていきます。ここで注意したいことは，**重心運動エネルギーを各粒子に展開すると，１つの粒子の速度（運動量）の２乗の項だけではなく，<u>２つの粒子の速度（運動量）の積の項が現れる</u>**ことです。

【４】重心運動エネルギーの変化を先ほどの積分を用いて表します

【２】で求めた運動方程式の積分において，$t_1 = 0$，$t_2 = t$ とおき，以下の重心運動エネルギーの変化の式に代入してみます。このとき，【２】の (19) 式と (20) 式の時間積分に対して粒子の番号 i や j で和をとります。(20) 式の最後の右辺の２つの項は $i \neq j$ として和をとると等しくなるので，後ろの項の２倍を用います。

$$\begin{aligned} \Delta T_G(0 \to t) &= \frac{1}{2M} \Big\{ \sum_{i=1}^{N} (m_i \dot{\boldsymbol{r}}_i)^2 + \sum_{i=1}^{N} \sum_{j \neq i}^{N} m_i \dot{\boldsymbol{r}}_i \cdot m_j \dot{\boldsymbol{r}}_j \Big\} \\ &= \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{N} \int_0^t m_i \dot{\boldsymbol{r}}_i \cdot \big(\boldsymbol{F}_i^{ex} + \sum_{k=1}^{N} \boldsymbol{F}_{ki}^{in} \big) dt + \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{N} \sum_{j \neq i}^{N} \int_0^t m_i \dot{\boldsymbol{r}}_i \cdot \big(\boldsymbol{F}_j^{ex} + \sum_{k=1}^{N} \boldsymbol{F}_{kj}^{in} \big) dt \\ &= \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} m_i \dot{\boldsymbol{r}}_i \cdot \boldsymbol{F}_j^{ex} + \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{N} \int_0^t m_i \dot{\boldsymbol{r}}_i \cdot \sum_{k=1}^{N} \big(\boldsymbol{F}_{ki}^{in} + \sum_{j \neq i}^{N} \boldsymbol{F}_{kj}^{in} \big) dt \\ &= \int_0^t \big(\sum_{j=1}^{N} \boldsymbol{F}_j^{ex} \big) \cdot \big(\sum_{i=1}^{N} \frac{m_i \dot{\boldsymbol{r}}_i}{M} \big) dt = \int_0^t \boldsymbol{F}^{ex} \cdot \dot{\boldsymbol{r}}_G \, dt = \overline{W}_G(0 \to t) \end{aligned} \tag{22}$$

(22) 式の内力の和 $\sum_{k=1}^{N} \big(\boldsymbol{F}_{ki}^{in} + \sum_{j \neq i}^{N} \boldsymbol{F}_{kj}^{in} \big)$ は，$\sum_{k=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \boldsymbol{F}_{kj}^{in}$ とまとまり，作用反作用の法則からこの和はゼロになります。

したがって，多粒子系の運動方程式を用いて求めた重心の運動エネルギー変化は，**「外力の和が重心にする仕事」の形**で表されます。また，内力が関わる項は作用反作用の法則によって打ち消しあい，**束縛力が働かない場合は「内力が粒子にする仕事」が重心運動エネルギーの変化に寄与しない**ことが示されました。

なお，この導出過程は，桑原さんが主張するように，「**粒子に対する定義Ｂの仕事から，多粒子系の運動方程式を用いて，重心に対する定義Ａの仕事を導出できた**」ことを示しているということもできます。

5.2　１粒子に束縛力が働いて固定されている場合

簡単のため，粒子 1 に働く内力の和が外力として働く束縛力 $\boldsymbol{F}_1^{ex} = \boldsymbol{R}$ とつりあうことで粒子 1 だけが固定される場合を考えます。また，この多粒子系に働く外力はこの束縛力だけであるとします。束縛力が満足する

式は次のようになり，$\Delta T_G(0\to t)$ の (22) 式を，外力を消去して内力だけで表現することも可能です。

$$\boldsymbol{F}_1^{ex}+\sum_{k=2}^{N}\boldsymbol{F}_{k1}^{in}=0,\qquad \boldsymbol{R}+\sum_{k=2}^{N}\boldsymbol{F}_{k1}^{in}=0,\qquad \therefore \boldsymbol{R}=-\sum_{k=2}^{N}\boldsymbol{F}_{k1}^{in} \tag{23}$$

さて，（22）式の重心運動エネルギーの変化 $\Delta T_G(0\to t)$ を内力だけで表すと次のようになります。

$$\begin{aligned}
\Delta T_G(0\to t) &= \int_0^t \boldsymbol{F}_1^{ex}\cdot(\sum_{i=1}^{N}\frac{m_i\dot{\boldsymbol{r}}_i}{M})dt \\
&= \int_0^t(-\sum_{k=2}^{N}\boldsymbol{F}_{k1}^{in})\cdot(\sum_{i=1}^{N}\frac{m_i\dot{\boldsymbol{r}}_i}{M})dt \\
&= -\sum_{k=2}^{N}\frac{m_1}{M}\int_0^t\boldsymbol{F}_{k1}^{in}\cdot\dot{\boldsymbol{r}}_1\,dt-\sum_{k=2}^{N}\sum_{i=2}^{N}\frac{m_i}{M}\int_0^t\boldsymbol{F}_{k1}^{in}\cdot\dot{\boldsymbol{r}}_i dt \\
&= -\sum_{k=2}^{N}\frac{m_1}{M}\int_0^t\boldsymbol{F}_{k1}^{in}\cdot\dot{\boldsymbol{r}}_1\,dt-\sum_{i=2}^{N}\frac{m_i}{M}\int_0^t\boldsymbol{F}_{i1}^{in}\cdot\dot{\boldsymbol{r}}_i dt-\sum_{i=2}^{N}\sum_{k\neq i}^{N}\frac{m_i}{M}\int_0^t\boldsymbol{F}_{k1}^{in}\cdot\dot{\boldsymbol{r}}_i dt \\
&= -\frac{m_1}{M}W_1^{in}(0\to t)+\sum_{i=2}^{N}\frac{m_i}{M}W_{1i}^{in}(0\to t)-\sum_{i=2}^{N}\sum_{k\neq i}^{N}\frac{m_i}{M}\ \overline{\mathscr{W}}_{k1i}^{in}(0\to t)
\end{aligned} \tag{24}$$

ここで，i 番目の粒子に働く内力の和がする仕事 $W_i^{in}(t_1\to t_2)$ と，j 番目の粒子から i 番目の粒子に働く内力がする仕事 $W_{ji}^{in}(t_1\to t_2)$ は，次のように定義されています。

$$W_i^{in}(t_1\to t_2)=\int_{t_1}^{t_2}(\sum_{k=1}^{N}\boldsymbol{F}_{ki}^{in})\cdot\dot{\boldsymbol{r}}_i dt,\qquad W_{ji}^{in}(t_1\to t_2)=\int_{t_1}^{t_2}\boldsymbol{F}_{ji}^{in}\cdot\dot{\boldsymbol{r}}_i dt \tag{25}$$

また，（24）式の最後の項は，**力が働く粒子の座標と速度を持つ（変位する）粒子の座標が異なるような「力と速度の積」**です。これは**通常の仕事の定義には当てはまりませんが，仕事と同じ次元を持ち，多粒子系に働く力によって粒子の速度の積を変化させる効果がある**ので，このような量を力が粒子にする「**擬仕事**」とよび，$\overline{\mathscr{W}}$ とかくことにします。いまの場合，「内力 $\boldsymbol{F}_{kj}^{in}$ による粒子 $\boldsymbol{r}_i$ に対する擬仕事」を次のように定義しました。

$$\overline{\mathscr{W}}_{kji}^{in}(t_1\to t_2)=\int_{t_1}^{t_2}\boldsymbol{F}_{kj}^{in}\cdot\dot{\boldsymbol{r}}_i\ dt \tag{26}$$

つまり，重心運動エネルギーの変化 ΔT_G は「**外力の和が重心にする仕事**」で説明できたのですが，1 粒子が外力で束縛されたモデルで，各粒子に働く力や仕事を用いて ΔT_G の説明をする場合は次のようになります。

固定された 1 粒子における力の釣り合いを用い，外力を消去して内力で表すと，ΔT_G は「**内力が粒子にする仕事**」**だけでは表せず**，「**内力が粒子にする擬仕事**」**を導入する必要があります**。
一方，「**外力の和が重心にする仕事**」の方も各項に分解して考えると次のようになり，同様に，ΔT_G は「**外力が粒子にする仕事**」**だけでは表せず**，「**外力が粒子にする擬仕事**」**を導入する必要があります**。

$$\begin{aligned}
\Delta T_G(0\to t) &= \int_0^t\boldsymbol{F}_1^{ex}\cdot\frac{m_1\dot{\boldsymbol{r}}_1}{M}dt+\sum_{k=2}^{N}\int_0^t\boldsymbol{F}_1^{ex}\cdot\frac{m_k\dot{\boldsymbol{r}}_k}{M}dt \\
&= \frac{m_1}{M}W_1^{ex}(0\to t)+\sum_{k=2}^{N}\frac{m_k}{M}\overline{\mathscr{W}}_{1k}^{ex}(0\to t)
\end{aligned} \tag{27}$$

ここで，「外力 $\boldsymbol{F}_i^{ex}$ が粒子 $\boldsymbol{r}_i$ にする仕事」と「外力 $\boldsymbol{F}_j^{ex}$ が粒子 $\boldsymbol{r}_k$ にする擬仕事」を次のように定義しました。

$$W_i^{ex}(t_1 \to t_2) = \int_{t_1}^{t_2} \boldsymbol{F}_i^{ex} \cdot \dot{\boldsymbol{r}}_i dt, \qquad \overline{\mathscr{W}}_{jk}^{ex}(t_1 \to t_2) = \int_{t_1}^{t_2} \boldsymbol{F}_j^{ex} \cdot \dot{\boldsymbol{r}}_k \, dt \tag{28}$$

重心の運動エネルギーの変化を説明する際には

1. 外力の和がまとめて重心に働くとすれば「外力の和が重心にする仕事」を原因として説明できる
2. 各粒子への外力の寄与には「外力が粒子にする仕事」に加え「外力が粒子にする擬仕事」が必要
3. 各粒子への内力の寄与には「内力が粒子にする仕事」に加え「内力が粒子にする擬仕事」が必要

6 おわりに

この問題をエネルギーの観点から見ると，系内で発生したエネルギーが，なんらかの相互作用を通じて，多粒子系の構成要素に分配され，その結果として重心運動エネルギーに転化したとみることができるでしょう。この過程を「仕事」という概念で一貫して説明できるかどうかが問われていたのだと思います。

「仕事」は運動方程式を積分する際に，力×速度の時間積分から導かれ，その力が保存力である場合は，「位置エネルギー」の概念に結びつき，「力学的エネルギー保存則」へとつなげるものでした。しかしながら，重心運動も含めて**系内のエネルギーの流れを各粒子に対する力の効果に分解して記述**するためには，**「仕事」**の概念だけでは不十分で，**「擬仕事」**の概念の導入が必要であることがわかりました。

ただし，重心運動の運動エネルギー変化をまとめて考える場合は，「擬仕事」という概念を導入せずに，**「外力の和が重心にする仕事」**$\overline{W}_G$ だけを考えれば十分です。**この量 $\overline{W}_G$ を「擬仕事（pseudo-work）」と呼称したために混乱が広がった面もあります。**また，外力の和が束縛力だけであったとしても，エネルギー保存則に抵触することはありません。一方，これを各粒子に分解して考えるのであれば，束縛力による 0 の仕事と固定されていない他の粒子に対して力がする「**擬仕事**」が重心の運動エネルギーを変化させているという見方もできるわけです。