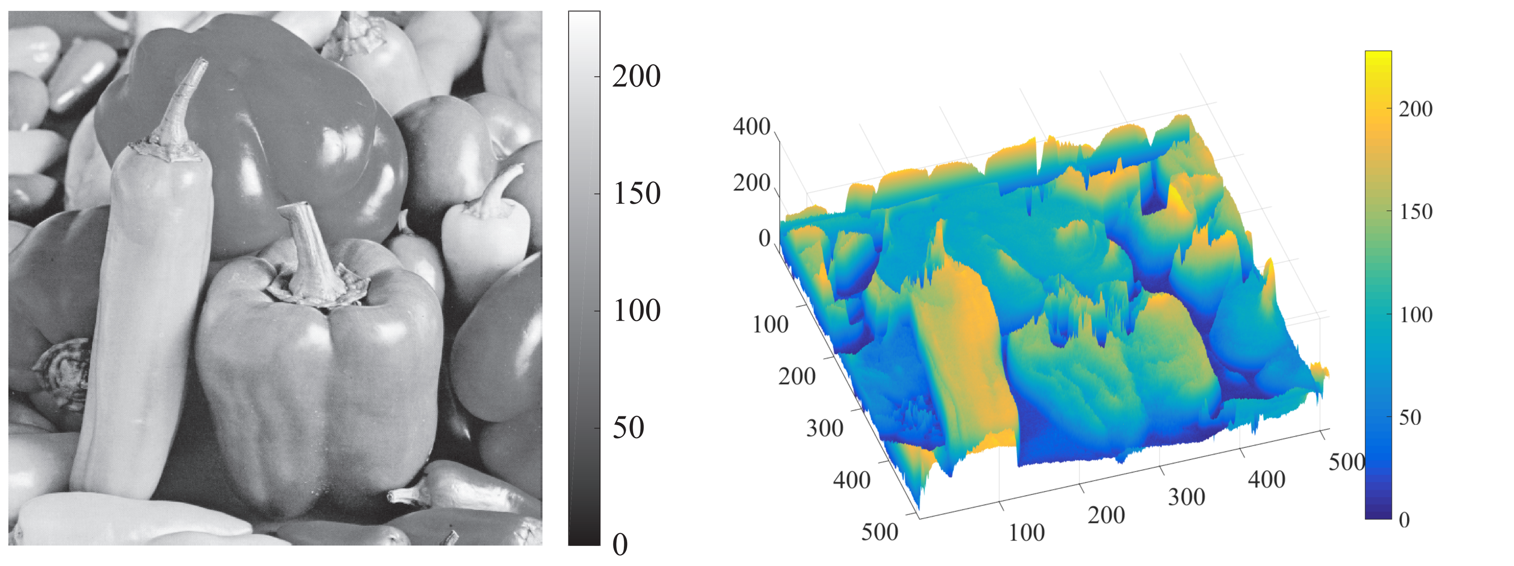
国立大学法人
大阪教育大学

教養学科　情報科学専攻　守本　晃

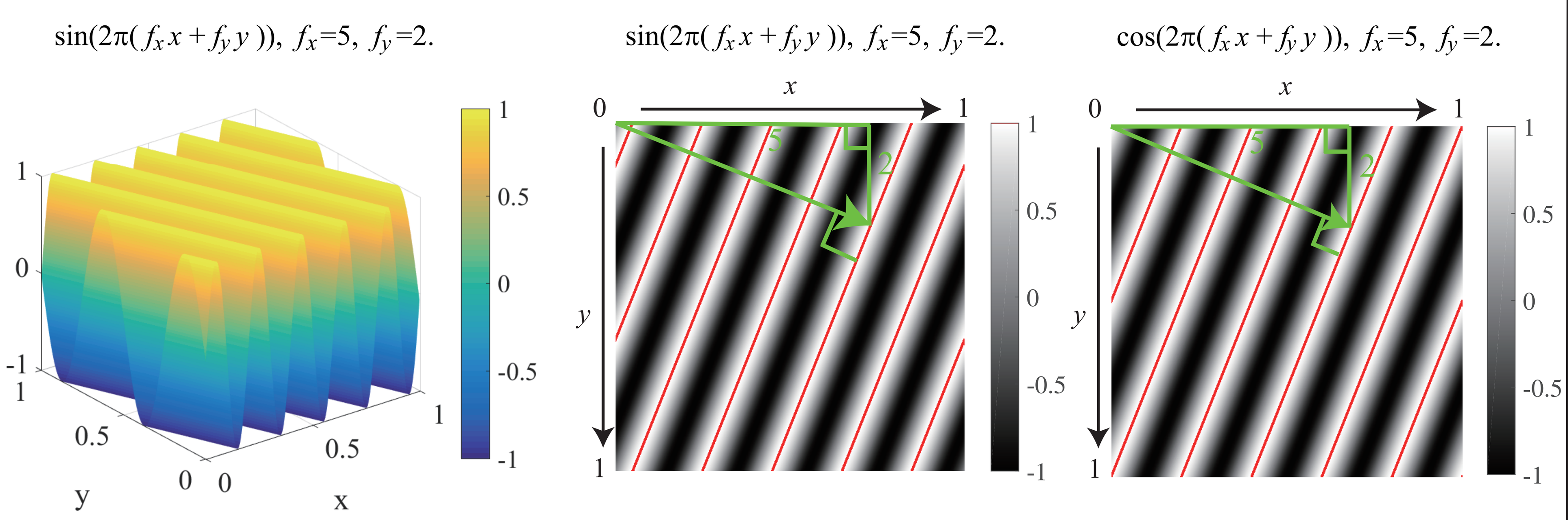
ウェーブレット解析を用いた画像分離について

モノクロ画像



モノクロ画像は，正方形メッシュ上に輝度値（0：黒から255：白までの整数値）を持つ関数である．値を z 軸に取ると，平面で定義された関数であることが分かる．

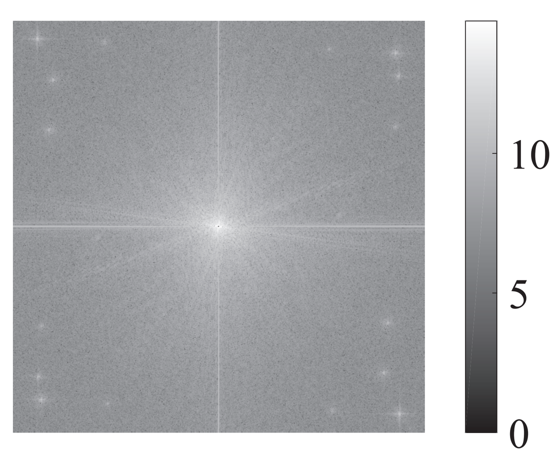
2次元の正弦波



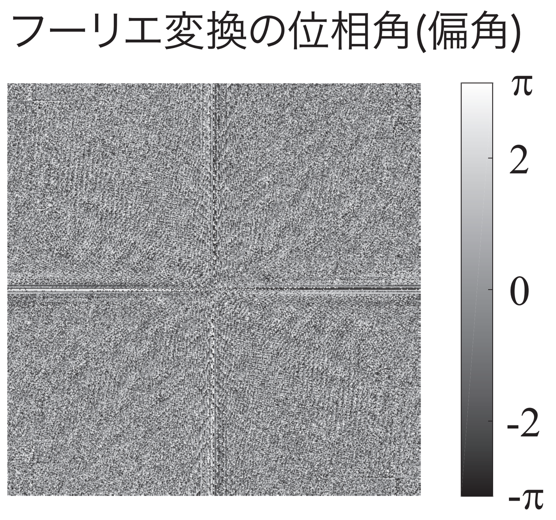
整数 f_x, f_y のペア (f_x, f_y) を空間周波数とよぶ．2次元の正弦波 $\sin(2\pi(f_x x+f_y y))$ のグラフは左図である．真上から見た濃淡図が中図である．波が一定値 c を持つ位置を波面と呼ぶ．つまり，$\{(x,y) \mid \sin(2\pi(f_x x + f_y y)) = c\}$．図の赤線が $c=1$ のときの波面であり，空間周波数 (f_x, f_y) と直交する．同じ空間周波数を持つ余弦波を右図に描く．波面の傾きはそのままで，波面が少し平行移動している．

フーリエ変換

フーリエ変換の大きさ(絶対値)



フーリエ変換の位相角(偏角)



図は中心が原点で，横軸が f_x 軸，縦軸が f_y 軸．

画像 $f(x,y)$ に，空間周波数 (f_x, f_y) の正弦波がどれだけ含まれているかを調べるためには，各メッシュ上での画像の輝度値と正弦波の値をかけ合わせ，その値を足し合わせれば良い．この作業は内積であり，積分で

$$\int\!\!\int f(x,y)\,\sin(2\pi(f_x x + f_y y))\,dxdy$$

と記述できる．オイラーの公式から，

$$e^{-2\pi i(f_x x+f_y y)} = \cos(2\pi(f_x x+f_y y)) - i\sin(2\pi(f_x x+f_y y))$$

であるから，画像と $e^{-2\pi i(f_x x+f_y y)}$ の内積を計算し，

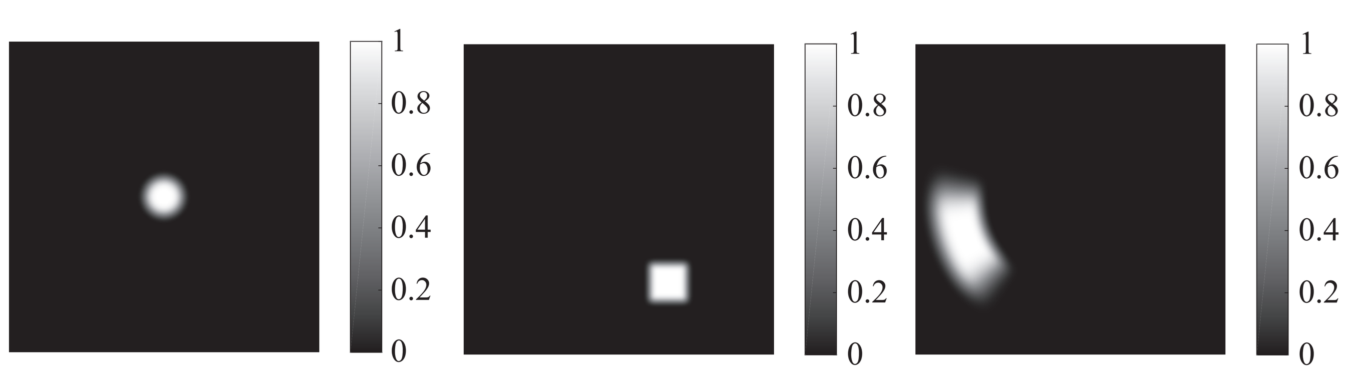
$$F(f_x, f_y) = \int\!\!\int f(x,y)\,e^{-2\pi i(f_x x+f_y y)}\,dxdy$$

とおく．$F(f_x, f_y)$ を画像 $f(x,y)$ のフーリエ変換とよび，その実部・虚部がそれぞれ画像に含まれている余弦波と正弦波の量を表す．このとき，逆フーリエ変換

$$f(x,y) = \int\!\!\int F(f_x, f_y)\,e^{2\pi i(f_x x+f_y y)}\,df_x df_y$$

が成立する．

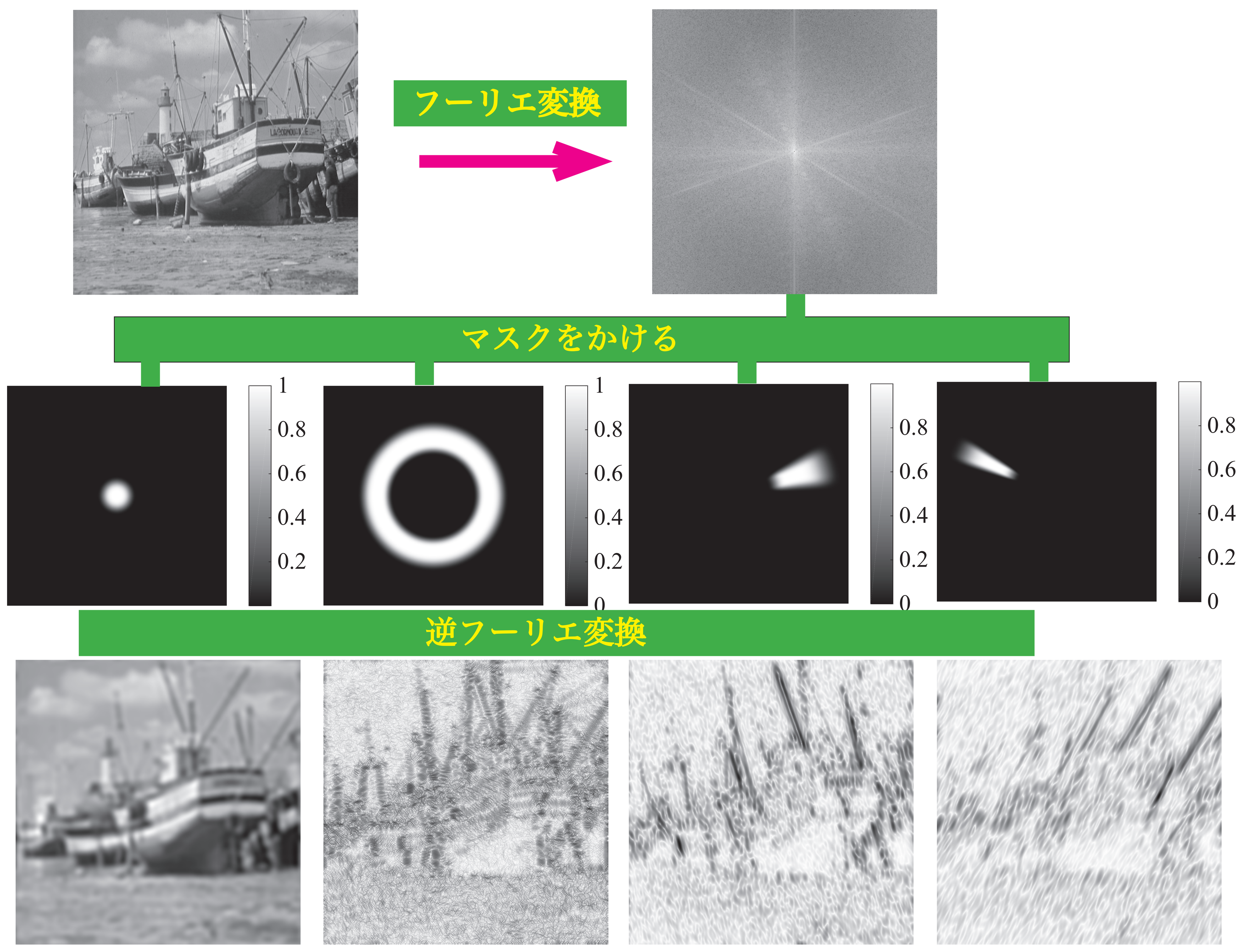
マスク



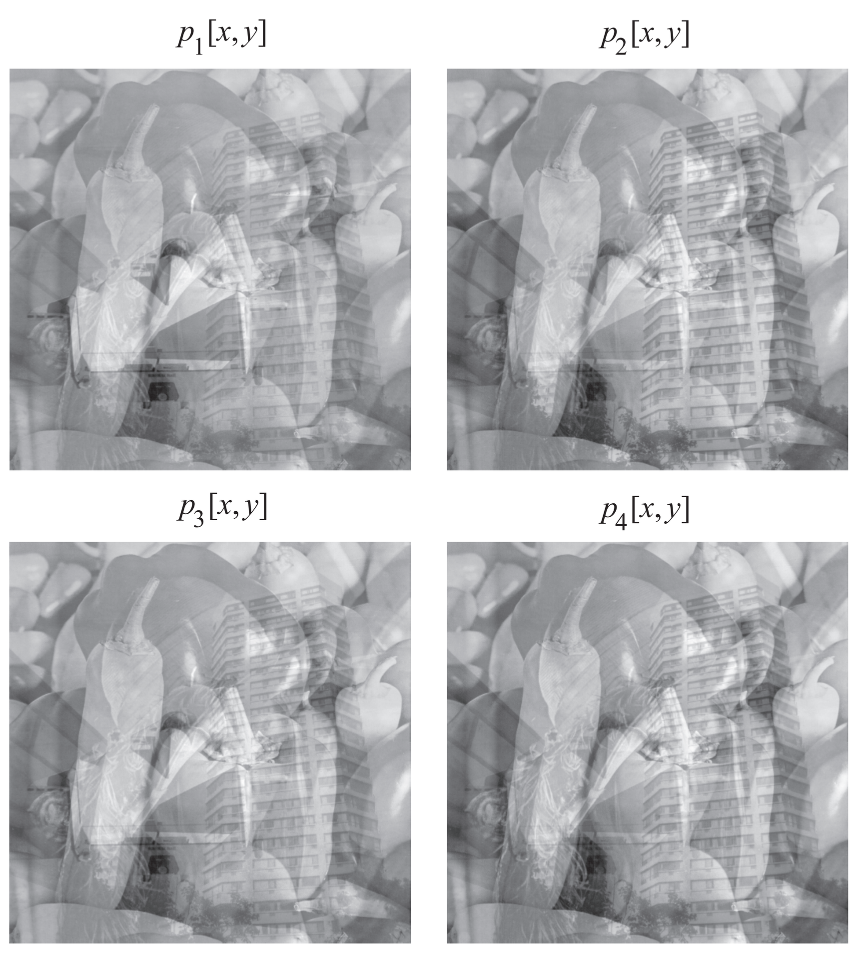
フーリエ変換の特定の範囲を切り出すために，0から1までの値を取るマスク（関数）を作る．フーリエ変換に上図のマスクをかけると白の部分の値だけ取り出せる．

フーリエ乗算作用素

画像をフーリエ変換して，マスクをかけて，逆フーリエ変換する操作を，フーリエ乗算作用素とよぶ．空間周波数と直交する波面(エッジ：輪郭線)が抽出される．



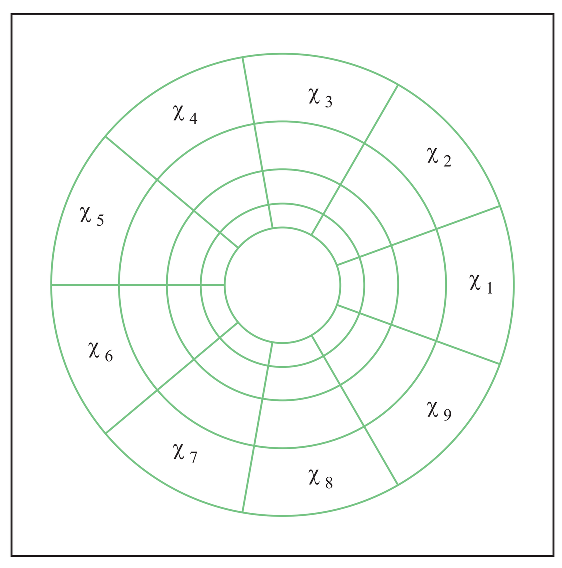
画像分離問題とその解法



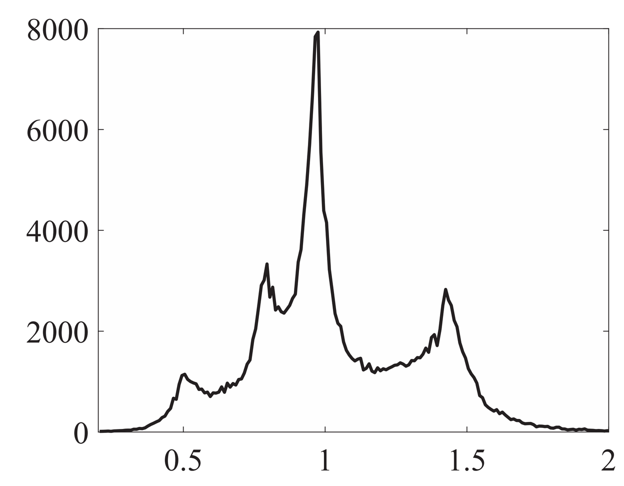
観測画像 $p_j[x,y]$, $j=1,\ldots,J$ は，元画像 $s_n[x,y]$, $n=1,\ldots,N$ の定数倍の重ね合わせで得られる次の混合モデル

$$p_j[x,y] = \sum_{n=1}^{N} a_{j,n}\, s_n[x,y]$$

を仮定する．今，J 種類の観測画像のみ手に入るとしよう．そこから，元画像の枚数 N と混合係数 $a_{j,n}$ を推定し，元画像に分離する問題を考えよう．



周波数領域を左図のように半径の比を一定にして覆うのがウェーブレット解析である．



2次元の画像に対してエッジは1次元要素なので，別々の元画像のエッジが一致する点は少ない．ウェーブレット解析のマスクを用いたフーリエ乗算作用素を観測画像 p_j に作用させると，複素数値エッジ画像 $P_j[x,y]$ が得られる．商 $P_2[x,y]/P_1[x,y]$ は，ある元画像のエッジ上の点では常に一定の実数値になる．そこで実数値になる商のヒストグラムを描けば，左中図が得られる．ヒストグラムのピークの数から元画像の数 N が推定できて，ピークを取る座標から混合係数の比 $a_{2,n}/a_{1,n}$ が推定できる．これらを組み合わせると，左図のように元画像に分離できる．

参考文献

[1] 守本晃・神山浩之・井上大樹・大道淳史・西村一志・芦野隆一・萬代武史，ウェーブレット解析を用いた画像分離，日本応用数理学会論文誌，Vol. 19, No. 3, pp. 257–278, 2009.