

情報数学演習 No. 1

問題1. 次の各集合は上または下に有界か?もし有界なら上限・下限・最大・最小を求めよ.

- (1) $x^2 < 4$ となる整数の集合
- (2) $x(x-2)(x-1) \leq 0$ となる実数の集合
- (3) $0 \leq \sin x \leq \frac{1}{2}$ となる実数の集合
- (4) $x(x-1)(x-4) < 0$ となる整数の集合
- (5) $0 < \tan x < 1$ かつ $0 \leq x \leq 2\pi$ となる実数の集合

問題2. 次の数列の集合 $S = \{a_n\}$, $n = 1, 2, 3, \dots$ に対して, 上限・下限・最大・最小を求めよ.

- | | |
|--|---|
| <ol style="list-style-type: none"> (1) $a_n = n$ (3) $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$ (5) $a_n = \cos\left(\frac{n\pi}{7}\right)$ (7) $a_n = \frac{n-2}{n^2+1}$ (9) $a_n = \sqrt{n^2+2n} - n$ (11) $a_n = \frac{n-1}{n}$ (13) $1, 2, \frac{1}{2}, 2\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, 2\frac{3}{4}, \frac{1}{8}, 2\frac{7}{8}, \frac{1}{16}, 2\frac{15}{16}, \dots$ (14) $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{5}, \frac{4}{5}, \frac{1}{6}, \dots$ (15) $1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, -\frac{1}{5}, -\frac{4}{5}, \frac{1}{6}, \frac{5}{6}, \dots$ (16) $-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{4}{3}, -\frac{1}{4}, \frac{5}{4}, -\frac{1}{5}, \frac{6}{5}, -\frac{1}{6}, \frac{7}{6}, \dots$ | <ol style="list-style-type: none"> (2) $a_n = (-1)^n n$ (4) $a_n = \sin\left(\frac{n\pi}{7}\right)$ (6) $a_n = \frac{1}{n} \sin\left(\frac{n\pi}{3}\right)$ (8) $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ (10) $a_n = \frac{3n-7}{n^2+1}$ (12) $a_n = \frac{n^2-5n}{n+1}$ |
|--|---|

問題3. 問題2の各数列の上極限・下極限ともしあれば極限を求めよ.

- | | | | | |
|------|------|------|------|------|
| (1) | (2) | (3) | (4) | (5) |
| (6) | (7) | (8) | (9) | (10) |
| (11) | (12) | (13) | (14) | (15) |
| (16) | | | | |

問題4. 収束しない数列 a_n, b_n で

- (1) $a_n + b_n$ は収束するような例を作れ.
- (2) $a_n b_n$ は収束するような例を作れ.
- (3) 平均 $C_n = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n a_j$ が収束するような例を作れ.

問題5. 数列 a_n, b_n に関する次の命題が成り立たない例をあげろ.

- (1) $a_n \rightarrow 0$ なら $a_n b_n \rightarrow 0$
- (2) $a_n \rightarrow 0$ なら $\frac{b_n}{a_n}$ は発散する.
- (3) $a_n \rightarrow 0$ なら数列の和 $S_n = \sum_{j=1}^n a_j$ の極限が存在する.
- (4) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty$ ならば $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = 0$ である.
- (5) $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_{n+1} - a_n) = 0$ ならば a_n は収束する.

問題6. 次の数列 a_n の和 $S_n = \sum_{j=1}^n a_j$ の極限が存在すれば求めよ.

- | | |
|---|---|
| (1) $a_n = \frac{1}{2^n}$ | (2) $a_n = (-1)^n$ |
| (3) $a_n = \frac{1}{n}$ | (4) $a_n = \sin\left(\frac{n\pi}{3}\right)$ |
| (5) $a_n = \frac{1}{2^n} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$ | (6) $a_n = \frac{1}{n(n+1)}$ |

問題7. 次の無限級数の和が存在すれば求めよ.

- (1) $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \dots$
- (2) $1 + \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) + \left(-\frac{2}{3} + \frac{2}{3}\right) + \left(-\frac{3}{4} + \frac{3}{4}\right) + \left(-\frac{4}{5} + \frac{4}{5}\right) + \dots$
- (3) $\left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3}\right) + \left(\frac{2}{3} - \frac{3}{4}\right) + \left(\frac{3}{4} - \frac{4}{5}\right) + \dots$
- (4) $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{2}{3} - \frac{3}{4} + \frac{3}{4} - \dots$