

情報数学演習 No.10 — 2変数関数 その2 —

性質1. 連続関数の4則演算は連続である.

- (1) $h(x)$ を1変数の連続関数とすると、 $f\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = h(x)$ は連続になる.
- (2) $f(X), g(X)$ を連続関数とすると、和 $f(X) + g(X)$ は連続関数になる.
- (3) $f(X), g(X)$ を連続関数とすると、積 $f(X)g(X)$ は連続関数になる.
- (4) $f(X)$ を連続関数とし点 $X = P$ で $f(P) \neq 0$ ならば、 $1/f(X)$ は点 $X = P$ で連続である.

これらの性質より、 $x, y, \sin x$ などは連続関数で、 $x \cos y, x^2 y$ などとも連続関数になる。連続でない関数を作るには、 $\tan x, \log x, 1/x$ などの不連続点（定義されていない点）を持つ関数を組み合わせるかあるいは、場合分けをする必要がある。例えば、 $f\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = 1/(x-y)$ という関数は分母 $x-y=0$ のところで不連続である。

問題1. 次の関数の定義されていない点の集合を図示せよ.

- (1) $1/(xy-1)$ (2) $\tan(x+2y)$ (3) $\log(x^2+y^2-4)$
- (4) $\sqrt{x+y-1}$ (5) $\frac{1}{x^2+y^2-1}$ (6) $\log(2x+y)$

定義1. 2変数関数 $f(X) = f\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)$ を x の関数 (y は定数) として、極限值

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f\left(\begin{smallmatrix} x+h \\ y \end{smallmatrix}\right) - f\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)}{h}$$

が存在するとき、この極限値を x 偏微分 (導関数) といい、

$$\frac{\partial f}{\partial x}(X), \quad \frac{\partial}{\partial x} f(X), \quad \partial_x f\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)$$

などと書く。また、極限值

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f\left(\begin{smallmatrix} x \\ y+h \end{smallmatrix}\right) - f\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)}{h}$$

を y 偏微分と呼び、

$$\frac{\partial f}{\partial y}(X), \quad \frac{\partial}{\partial y} f(X), \quad \partial_y f\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)$$

と書く。

問題2. 関数

$$f(X) = f\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = \begin{cases} 0, & \text{if } xy \neq 0, \\ 1, & \text{if } xy = 0 \end{cases}$$

に関して、次のことを示せ。

- (1) $f(X)$ は原点 O で不連続なことを示せ.
- (2) $f(X)$ は原点 O で偏微分できることを示せ.

問題3. 関数

$$g(X) = g\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = \begin{cases} xy, & \text{if } xy \neq 0, \\ x, & \text{if } y = 0, \\ y, & \text{if } x = 0 \end{cases}$$

に関して、次のことを示せ。

- (1) $g(X)$ は原点 O で連続なことを示せ.
- (2) $g(X)$ は原点 O で偏微分できることを示せ.

注意1. 点 X で偏微分できる \Rightarrow 点 X で連続 は成立しない.

問題4. 次の関数を x と y で偏微分せよ.

- (1) $\sin x \cos y$ (2) $\sin(x^2 + 3y)$ (3) $x^3 y^2 + 3x$
- (4) $\sqrt{x^2 + y^3}$ (5) $e^x \cos 2y$ (6) e^{x^2+3y}
- (7) $\frac{1}{x^2 + y^3}$ (8) $\tan(x^2 + 5y)$ (9) $\log(x^2 + y^2)$