情報数学演習 No.11 —２変数関数　その３—

定義１．　関数 $f(X)=f\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ が点 $P=\begin{pmatrix}p\\q\end{pmatrix}$ で微分できるとは，ある 1×2 行列 $A=(a,b)$ と関数 $g(X)$ が存在して，

$$\begin{aligned} f(X)-f(P) &= A(X-P)+g(X)=a(x-p)+b(y-q)+g(X),\\ \lim_{X\to P}\frac{g(X)}{|X-P|} &= 0 \end{aligned}$$

が成立することを言う．このとき，行列 A を f の点 P での微分またはヤコビ行列と呼び，$f'(P)$ や $Df(P)$ と書く．

問題１．　$f(X)$ が点 P で微分できるなら，偏微分できて，

$$f'(P)=\left(\frac{\partial}{\partial x}f(P),\ \frac{\partial}{\partial y}f(P)\right)$$

となることを示せ．偏微分できるときに右辺の偏微分を集めた行列を $\mathrm{grad}f(P)$ と書いて勾配ベクトルという．

問題２．　次の関数は 点 $P=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ 微分できるか？できるならばヤコビ行列を求めよ．

(1)　$x+y$　　(2)　x^2　　(3)　xy　　(4)　x^2y

問題３．　関数

(1)　$f\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{cases}0, & \text{if}\quad xy\neq 0,\\ 1, & \text{if}\quad xy=0.\end{cases}$　　(2)　$g\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{cases}xy, & \text{if}\quad xy\neq 0,\\ x, & \text{if}\quad y=0,\\ y, & \text{if}\quad x=0.\end{cases}$

は原点で微分できないことを示せ．

問題４．　関数 $f(X)$ が点 P で微分できるなら，点 P で連続であることを示せ．

定理．　$f(X)$ が点 P の近傍で偏微分でき，点 P で偏導関数が連続なとき，$f(X)$ は点 P で微分できる．

定義２．　接平面の方程式　$f(X)$ が点 P で微分できるとき，点 P での微分

$$f(X)-f(P)=A(X-P)+g(X)=a(x-p)+b(y-q)+g(X)$$

の $g(X)$ を外して $f(X)$ を変数 z に置き換えた平面の方程式

$$z-f(P)=A(X-P)=a(x-p)+b(y-q)$$

を $f(X)$ の点 P での接平面の方程式という．

問題５．　次の関数 $f(X)$ の与えられた点 P での接平面の方程式を求めよ．

(1)　$f\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=3x^3-xy^2+5y^4,\quad P=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$　　(2)　$f\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=e^x\sin y,\quad P=\begin{pmatrix}1\\\pi\end{pmatrix}$

(3)　$f\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=x^2y+x\sin y,\quad P=\begin{pmatrix}2\\2\pi\end{pmatrix}$　　(4)　$f\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\log xy,\quad P=\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}$

定義．３　n 次元の変数を $X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}\in\mathbf{R}^n$ 点 $P=\begin{pmatrix}p_1\\p_2\\\vdots\\p_n\end{pmatrix}\in\mathbf{R}^n$ として，$\mathbf{R}^n$ から $\mathbf{R}$ への関数を $f(X)$ とする．

１．点 P で x_j のみを変数としたときの関数 $g(x_j)=f\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_j\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}$ が，$x_j=p_j$ で微分できるとき，関数 $f(X)$ は点 P において x_j で偏微分できるという．また x_j 偏導関数を

$$\frac{\partial}{\partial x_j}f(P),\quad f_{x_j}(P)$$

などと書く．

２．関数 $f(X)$ が点 P で微分できるとは，$1\times n$ 行列 $A=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ と関数 $g(X)$ がとれて，

$$\begin{aligned} f(X)-f(P) &= A(X-P)+g(X)\\ &= a_1(x_1-p_1)+a_2(x_2-p_2)+\cdots+a_n(x_n-p_n)+g(X),\\ \lim_{X\to P}\frac{g(X)}{|X-P|} &= 0 \end{aligned}$$

が成立することを言う．このとき，行列 A を f の点 P での微分またはヤコビ行列と呼び，$f'(P)$ や $Df(P)$ と書く．

３．点 P で微分できるなら偏微分できて，

$$f'(P)=\left(\frac{\partial}{\partial x_1}f(P),\frac{\partial}{\partial x_2}f(P),\cdots,\frac{\partial}{\partial x_n}f(P)\right)$$

である．右辺の偏微分を集めたベクトルを勾配ベクトルといい $\mathrm{grad}f(P)$ と書く．