情報数学演習　No.12 —多変数関数　その１—

問題１．　次の関数を偏微分して点 P における勾配ベクトルを求めよ．

(1) $$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \sin(x_1x_2)e^{x_3}, \quad P = \begin{pmatrix} 1 \\ \pi \\ 2 \end{pmatrix}$$

(2) $$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_1^2x_2 + x_1^3e^{x_3} + \cos x_1 \sin x_2, \quad P = \begin{pmatrix} \pi/2 \\ \pi \\ 3 \end{pmatrix}$$

(3) $$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = x_1^2x_2x_3^3x_4 + e^{x_1+x_2+x_3+x_4}, \quad P = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

(4) $$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2x_4^2}, \quad P = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

定理１．　n 変数関数 $f(X)$ が点 P の近傍で偏微分できて，点 P で偏導関数が連続なら $f(X)$ は点 P で微分できる．

定義．　(写像)　$F:\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ の写像，つまり $\mathbf{R}^n$ の点 X に対して $\mathbf{R}^m$ の点を対応する関数を写像という．$\mathbf{R}^n$ 変数関数を $f_1(X), f_2(X), \cdots, f_m(X)$ と m 個縦に並べたもので，

$$F(X) = F\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(X) \\ f_2(X) \\ \vdots \\ f_m(X) \end{pmatrix}$$

を写像という．

定義．　(写像の偏微分)　$F:\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ の写像の各 n 変数関数 $f_1(X), f_2(X), \cdots, f_m(X)$ が偏微分できるとき，次の $m \times n$ 次の行列

$$\mathrm{grad}\ F(P) = \begin{pmatrix} (\mathrm{grad}\ f_1)(P) \\ (\mathrm{grad}\ f_2)(P) \\ \vdots \\ (\mathrm{grad}\ f_m)(P) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(P) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(P) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(P) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(P) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(P) & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(P) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(P) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(P) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(P) \end{pmatrix}$$

を点 P での写像 $F(X)$ のヤコビ行列という．またヤコビ行列が正方行列の時の行列式をヤコビ行列式 (ヤコビアン) とよび，

$$\frac{\partial(f_1, f_2, \cdots, f_n)}{\partial(x_1, x_2, \cdots, x_n)}$$

と書く．

問題２．　次の写像のヤコビ行列ともしあればヤコビ行列式を求めよ．

(1) $$F\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1x_2 \end{pmatrix}$$

(2) $$F\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1^2 \\ e^{x_1x_2} \end{pmatrix}$$

(3) $$F\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \cos x_2 \\ x_1 \sin x_2 \end{pmatrix}$$

(4) $$F\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_2^2 + x_3 \\ x_1x_2x_3 \end{pmatrix}$$

(5) $$F\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \cos x_2 \cos x_3 \\ x_1 \sin x_2 \cos x_3 \\ x_1 \sin x_3 \end{pmatrix}$$

(6) $$F\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 - 3x_1x_2x_3 \\ e^{x_1x_2x_3} \end{pmatrix}$$

定義．　(写像の微分)　$F:\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ が点 P で微分できるとは，ある $m \times n$ 行列 A と写像 $G(X)$ が存在して，

(1) $F(X) = F(P) + A(X - P) + G(X)$　　m 次の縦ベクトル

(2) $\displaystyle\lim_{X \to P} \frac{G(X)}{|X - P|} = O$　　m 次の縦ベクトル

が成立することを言う．この行列 A を $F(X)$ の点 P における微分といい

$$F'(P), \quad \frac{dF}{dX}(P), \quad (DF)(P)$$

などと書く．