情報数学演習　No.13 —多変数関数　その２—

問題１．　次の関数 $f(X)$ に関して以下の問に答えよ．

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_1^2\sin\left(\frac{1}{x_1}\right)+x_2^2\sin\left(\frac{1}{x_2}\right), \qquad \text{if } x_1x_2\neq 0,$$

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \end{pmatrix} = x_1^2\sin\left(\frac{1}{x_1}\right), \qquad f\begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_2^2\sin\left(\frac{1}{x_2}\right),$$

$$f\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0.$$

1. 関数 $f(X)$ は原点で連続である．
2. $f(X)$ は原点で偏微分できて，$f_{x_1}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}=f_{x_2}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}=0.$
3. 偏導関数 $f_{x_1}(X), f_{x_2}(X)$ は原点で不連続である．
4. $f(X)$ は原点で微分できる．

定理．　（合成写像の微分）　$F:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^m$ と $G:\mathbf{R}^m\to\mathbf{R}^l$ がそれぞれ点 P と点 $F(P)$ で微分できるとせよ．このとき合成写像 $G(F(X))$ は点 $X=P$ で微分できて微分は，

$$(G(F(P)))'=G'(F(P))F'(P)$$

である．ただし，右辺は $l\times m$ 行列 $G'(F(P))$ と $m\times n$ 行列 $F'(P)$ の積である．

問題２．　次の写像 F, G の合成写像 $G(F(X))$ を点 P で微分せよ．

(1) $F\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \sin(xy) \\ x+y \end{pmatrix},\quad G\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} e^{uv} \\ \cos(u+v) \end{pmatrix},\quad P=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$

(2) 小問 (1) で $F(G(X))$ を点 P で微分せよ．

(3) $F\begin{pmatrix} r \\ \theta \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta \end{pmatrix},\quad G\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x^2y \\ e^{x+y} \end{pmatrix},\quad P=\begin{pmatrix} 1 \\ \pi \end{pmatrix}.$

(4) 小問 (3) で $F(G(X))$ を点 P で微分せよ．

(5) $F\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \sin(xy) \\ \cos(x+y) \end{pmatrix},\quad G\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \sqrt{u^2+v^2} \end{pmatrix},\quad P=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$

定義．　(高階偏導関数)　n 変数関数 $f(X)$ の 偏導関数 $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ は n 変数関数でそれらが x_j で偏微分可能なら，

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)(X)=\frac{\partial^2 f}{\partial x_j\partial x_i}(X)$$

を第２階偏導関数という．また $f_{x_ix_j}$ なども書く．第２階偏導関数は，n^2 種類考えられる．これらを行列で並べたものを

$$f''(X)=\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_1}(X) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2\partial x_1}(X) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n\partial x_1}(X) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_2}(X) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2\partial x_2}(X) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n\partial x_2}(X) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_n}(X) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2\partial x_n}(X) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n\partial x_n}(X) \end{pmatrix}$$

をヘッセ行列という．

問題３．　次の関数のヘッセ行列をもとめよ．

(1) $f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=x^2+y^2$　　(2) $f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=x^3+x^2y-2y^2$

(3) $f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\sin(xy)$　　(4) $f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=x^2y^2z^2$

(5) $f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=e^{x+y+z}$　　(6) $f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=e^{xyz}$

定理．　n 変数関数 $f(X)$ に対して，$\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)$ と $\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)$ が存在して連続なら，両者は等しい．つまり偏微分の順序によらない．このことから，n 変数関数の 第２階偏導関数は $(n^2+n)/2$ 種類である．

問題４．　$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\dfrac{1}{x+y}$ とするとき，次の等式を示せ．

$$x\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial x}+y\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+2\frac{\partial f}{\partial x}=0$$

問題５．　$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\log\sqrt{x^2+y^2}$ のとき，ラプラシアン $\Delta f=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial x}+\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial y}$ を求めよ．

問題６．　$f(X)$ を n 変数の微分可能関数としたとき，n 次元ベクトル P, E と実数 t に対し，１変数関数 $g(t)=f(P+tE)$ の 微分 $g'(t)$ が，

$$g'(t)=(\mathrm{grad}\, f(P+tE))\,E$$

（横ベクトル $\mathrm{grad}\, f(P+tE)$ と縦ベクトル E の積）になることを示せ．