情報数学演習　No.14 —多変数関数　テーラー展開—

定義．　2 変数関数 $f(X)$ を考える．$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ とし，点 $P = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$ 方向ベクトルを $E = \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}$ としよう．関数 $f(X)$ は N 階までの偏導関数が全て連続とする．このとき 1 変数関数 $g(t) = f(P + tE)$ は N 階微分できて，導関数は連続で m 階微分は，

$$g^{(m)}(t) = \left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^m f(X)\Big|_{X=P+tE}$$

である．ただし，

$$\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^m f(X) = \sum_{l=0}^{m} {}_m\mathrm{C}_l h^l k^{m-l} \frac{\partial^m}{\partial x^l \partial y^{m-l}} f(X)$$

であり，$h(X)|_{X=P+tE}$ は，関数 $h(X)$ の $X = P + tE$ での関数値である．

関数 $g(x)$ は上の定義の関数とする．このとき 1, 2 階微分が，

$$1)\quad g'(t) = \left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right) f(X)\Big|_{X=P+tE} = h\frac{\partial}{\partial x} f(P+tE) + k\frac{\partial}{\partial y} f(P+tE)$$

$$\begin{aligned} 2)\quad g^{(2)}(t) &= \left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f(X)\Big|_{X=P+tE} \\ &= h^2\frac{\partial^2}{\partial x^2} f(P+tE) + 2hk\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f(P+tE) + k^2\frac{\partial^2}{\partial y^2} f(P+tE) \end{aligned}$$

である．

定義．　$g(t)$ は，N 階微分できるから $t = 0$ の回りでテーラー展開すると，

$$\begin{aligned} g(t) &= \sum_{m=0}^{N-1} \frac{g^{(m)}(0)}{m!} t^m + \frac{g^{(N)}(\theta)}{N!} t^N \\ &= g(0) + g'(0)t + \frac{g^{(2)}(0)}{2!} t^2 + \cdots + \frac{g^{(N-1)}(0)}{(N-1)!} t^{N-1} + \frac{g^{(N)}(\theta)}{N!} t^N \end{aligned}$$

である．ただし，θ は 0 と t の間の数である．このテーラー展開の $t = 1$ を代入し $f(X)$ で書き直すと，

$$\begin{aligned} f(P+E) &= f\begin{pmatrix} p+h \\ q+k \end{pmatrix} \\ &= f\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} + \left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right) f\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} + \frac{1}{2!}\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \\ &+ \cdots + \frac{1}{(N-1)!}\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{N-1} f\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \\ &+ \frac{1}{N!}\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^N f\begin{pmatrix} p+\theta h \\ q+\theta k \end{pmatrix} \end{aligned}$$

を得る．これを 2 変数関数 $f(X)$ の点 P の回りのテーラー展開という．

以下の問題を解く際には，N 次のテーラー展開では，$\theta = 0$ として扱うこと．つまり，$N+1$ 次までテーラー展開して N 次の展開項まで取ることにする．

問題 1．次の関数 $f(X)$ を点 P の回りで 2 次までテーラー展開せよ．

(1) $f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x^4 y + x^2 + y \qquad P = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

(2) $f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \cos x \qquad P = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

(3) $f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \cos x \ \sin y \qquad P = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

(4) $f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = e^x e^y \qquad P = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

(5) $f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (\tan x)y + 2y \qquad P = \begin{pmatrix} \pi/4 \\ 1 \end{pmatrix}$

(6) $f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = e^x(x + y^2) \qquad P = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

(7) $f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x^2 + y^2 + 2xy \qquad P = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$