情報数学演習　No.15 —2 変数関数　極値問題—

定義.　2 変数関数 $f(X)$ を考える．$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ とし，点 $P = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$，方向ベクトルを $E = \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}$ としよう．このとき，点 $X = P$ で極大 (極小) になるとは，$\exists\delta > 0$ 十分小が取れて，任意の $|E| < \delta$ に対して，

$$f(P) \geq f(P+E) \qquad \text{極小の時は}\ f(P) \leq f(P+E)$$

が成立することを言う．(極大とは，点 P の十分近くでは，$f(P)$ が一番大きいこと)

問題１.　2 変数関数 $f(X)$ が微分できて，点 $X = P$ で極大値を取るならば，

$$\mathrm{grad}\, f(P) = \left(\frac{\partial}{\partial x}f(P), \frac{\partial}{\partial y}f(P)\right) = (0,0)$$

であることを示せ．ヒント：

$$\frac{\partial}{\partial x}f(P) = \lim_{x\to p}\frac{f\begin{pmatrix} x \\ q \end{pmatrix} - f\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}}{x-p}$$

で分子は定符号で分母は符号が変わることを利用せよ．

極値の判定法　関数 $f(X)$ は，何階も微分できるとせよ．点 $X = P$ で極値を取るならば，勾配ベクトル $\mathrm{grad}\, f(P) = 0$ である．勾配ベクトルが 0 になる点を停留点という．停留点 $X = P$ でのテーラー展開は

$$f(P+E) = f(P) + \frac{1}{2}\left(h^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}f(P) + 2hk\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}f(P) + k^2\frac{\partial^2}{\partial y^2}f(P)\right) + \cdots$$

になる．もし，2 次の項

$$A(E) = A\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} = \left(h^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}f(P) + 2hk\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}f(P) + k^2\frac{\partial^2}{\partial y^2}f(P)\right)$$

が全ての $E = \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} \neq 0$ で定符号 ($A(E)$ が常に正または常に負) ならば, $|E| < \delta$ が十分小さいとき h, k の 3 次以上の項は無視してもよく，極値になる．

問題２.　次の関数 $f(X)$ の停留点を求めよ．

(1) $f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 4xy - 2y^2 - x^4$　　(2) $f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x^2 + y^3 + 2x$

(3) $f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x^3 + y^3 - 3x$　　(4) $f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x^4 + y^3 - 3xy^2$

（１）極小値　全ての $E \neq 0$ で テーラー展開の 2 次の項 $A(E) > 0$ であれば，停留点 $f(P)$ は極小値である．つまり，

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x^2}f(P) &> 0 && \text{2 次の項の係数が正} \\ \left(\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}f(P)\right)^2 - \frac{\partial^2}{\partial x^2}f(P)\frac{\partial^2}{\partial y^2}f(P) &< 0 && \text{2 次方程式の判別式が負} \end{aligned}$$

の場合である．

（２）極大値　全ての $E \neq 0$ で テーラー展開の 2 次の項 $A(E) < 0$ であれば，停留点 $f(P)$ は極大値である．つまり，

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x^2}f(P) &< 0 && \text{2 次の項の係数が負} \\ \left(\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}f(P)\right)^2 - \frac{\partial^2}{\partial x^2}f(P)\frac{\partial^2}{\partial y^2}f(P) &< 0 && \text{2 次方程式の判別式が負} \end{aligned}$$

の場合である．

（３）極値じゃない　停留点 P で判別式正の時

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}f(P)\right)^2 - \frac{\partial^2}{\partial x^2}f(P)\frac{\partial^2}{\partial y^2}f(P) > 0 \qquad \text{2 次方程式の判別式が正}$$

の場合には極値じゃない．

（４）わからない　停留点 P で判別式=0 この場合は極値になったりならなかったりする．

問題３.　次の関数 $f(X)$ の極値を求めよ．

(1) $f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x^2 + 2y^2 - 4y + y^3$

(2) $f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 4xy - 2x^2 - y^4$

(3) $f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = xy + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$

(4) $f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x^4 + y^2 - 4xy$

(5) $f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x^2 + y^2 + 2x$

(6) $f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = e^{x+y} - x - y^3$