情報数学演習 No.16 —ラグランジュの未定乗数法—

定義．　2 変数の制約条件付きの極値問題を考えよう．つまり，変数を $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ とし，制約条件 $g(X) = 0$ の下で，関数 $f(X)$ の極値を求める問題を考える．この極値をとる点 $X = P$ は，もう 1 変数 λ を導入した関数

$$F\begin{pmatrix} x \\ y \\ \lambda \end{pmatrix} = f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \lambda g\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

の極値条件

$$\frac{\partial F}{\partial x}\begin{pmatrix} x \\ y \\ \lambda \end{pmatrix} = \frac{\partial f}{\partial x}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \lambda\frac{\partial g}{\partial x}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0,$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}\begin{pmatrix} x \\ y \\ \lambda \end{pmatrix} = \frac{\partial f}{\partial y}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \lambda\frac{\partial g}{\partial y}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0,$$

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda}\begin{pmatrix} x \\ y \\ \lambda \end{pmatrix} = -g\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$$

を満たす解の中にある．ただし， $g'(P) \neq (0,0)$ とする．新しく導入した変数 λ を **ラグランジュの未定乗数**といい，この方法を **ラグランジュの未定乗数法** と呼ぶ．

問題 1．　制約条件 $g(X) = 0$ の下で関数 $f(X)$ の最大値・最小値と極大値・極小値を求めよ．

(1) $g(X) = x + y - 2 = 0,$　　$f(X) = xy$

(2) $g(X) = x^2 + y^2 - 4 = 0,$　　$f(X) = x + 2y$

(3) $g(X) = x^2 + xy + y^2 - 1 = 0,$　　$f(X) = x^2 + y^2$

(4) $g(X) = x^2 + y^2 - 1 = 0,$　　$f(X) = xy$

(5) $g(X) = x^2 + y^2 - 9 = 0,$　　$f(X) = x^2 y$

(6) $g(X) = 2x + y - 3 = 0,$　　$f(X) = x^2 + y^2$

(7) $g(X) = y + x^2 - 4 = 0,$　　$f(X) = 2x^2 + y^2$

(8) $g(X) = x^2 + 4y^2 - 4 = 0,$　　$f(X) = x + y$