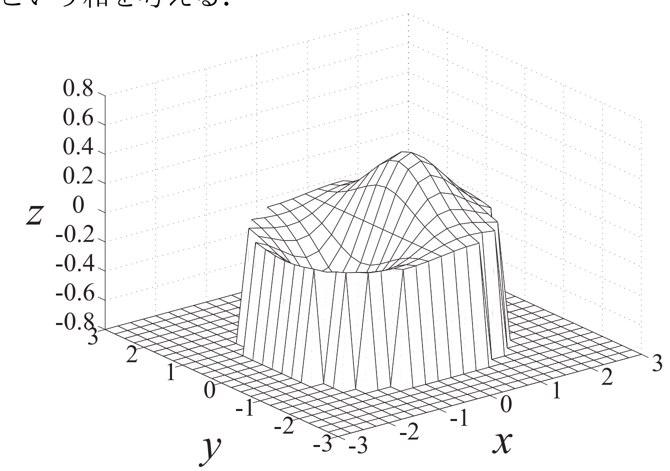
情報数学演習　No.17 —重積分—

$x-y$ 平面上の関数 $f\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ の領域 D で囲まれる部分の体積を求めよう．そのために，左下の図のように $x-y$ 平面を細分して，

$$S(\text{細分}) = \sum \text{細分の面積} \times f(\text{その細分の中の } (x,y) \text{ の値})$$

という和を考える．



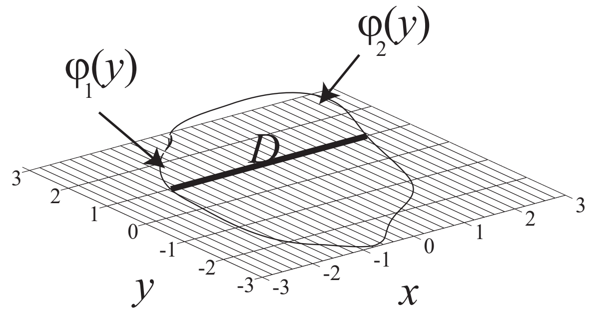
$S(\text{細分})$

$\downarrow$ 細かくする

$$\int\int_D f\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} dxdy$$

細分を細かくしたとき収束する場合に積分できるという．

この定義で，積分を求めるのは難しいので，領域 D の x 方向の細分を細かくしてから，次に y 方向の細分を細かくすることを考える．



領域 D を y 座標が a から b までで x 座標が $\varphi_1(y)$ から $\varphi_2(y)$ までというように分ける．

$$D = \{\varphi_1(y) \le x \le \varphi_2(y) \quad a \le y \le b\}$$

そうすると領域 D での積分は先に x 方向続いて y 方向の 2 回積分に置き換わる．

$$\int\int_D f\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} dxdy = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)} f\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} dx\right) dy$$

右辺の 2 重積分を計算する．計算順序は括弧の中の積分を最初に計算する．

問 1．積分範囲 D を $D=[1,2]\times[0,2]=\{1\le x\le 2,\ 0\le y\le 2\}$ とするとき以下の重積分を計算せよ．

1) $\int\int_D dxdy$　2) $\int\int_D x\,dxdy$　3) $\int\int_D y\,dxdy$

4) $\int\int_D xy\,dxdy$　5) $\int\int_D x^2+y^2\,dxdy$　6) $\int\int_D e^{x+y}\,dxdy$

問 2．積分範囲 D を $D=\{0\le y\le x,\ 0\le x\le 2\}$ とするとき以下の積分を計算せよ．

1) $\int\int_D dxdy$　2) $\int\int_D x\,dxdy$　3) $\int\int_D y\,dxdy$

4) $\int\int_D xy\,dxdy$　5) $\int\int_D x^2+y^2\,dxdy$　6) $\int\int_D e^{x+y}\,dxdy$

問 3．積分範囲 D を $D=\{x^2\le y\le x,\ 0\le x\le 1\}$ とするとき以下の積分を計算せよ．

1) $\int\int_D dxdy$　2) $\int\int_D x\,dxdy$　3) $\int\int_D y\,dxdy$

4) $\int\int_D xy\,dxdy$　5) $\int\int_D x^2+y^2\,dxdy$　6) $\int\int_D x^2y\,dxdy$

問 4．積分範囲 D を $D=\{0\le x\le \sin y,\ 0\le y\le \pi\}$ とするとき以下の積分を計算せよ．

1) $\int\int_D dxdy$　2) $\int\int_D x\,dxdy$　3) $\int\int_D y\,dxdy$

4) $\int\int_D xy\,dxdy$　5) $\int\int_D y^2\,dxdy$　6) $\int\int_D xy^2\,dxdy$

問 5．積分範囲 D を 単位円の右上 1/4 つまり, $D=\{x^2+y^2\le 1,\ 0\le y,\ 0\le x\}$ とするとき以下の積分を計算せよ．$D=\{0\le x\le\sqrt{1-y^2},\ 0\le y\le 1\}$ または， $D=\{0\le y\le\sqrt{1-x^2},\ 0\le x\le 1\}$ で計算せよ．

1) $\int\int_D dxdy$　2) $\int\int_D x\,dxdy$　3) $\int\int_D y\,dxdy$

4) $\int\int_D xy\,dxdy$　5) $\int\int_D y^2\,dxdy$　6) $\int\int_D x^2\,dxdy$

問 6．問 5 と同じ重積分を極座標による変数変換で解け，$x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$ とし，積分範囲は $E=\{0<r\le 1,\ 0\le\theta\le\pi/2\}$ となり，$dxdy=rdrd\theta$ である．

1) $\int\int_D dxdy$　2) $\int\int_D x\,dxdy$　3) $\int\int_D y\,dxdy$

4) $\int\int_D xy\,dxdy$　5) $\int\int_D y^2\,dxdy$　6) $\int\int_D x^2\,dxdy$