# 情報数学演習 No. 2 —関数—

関数 $f$ が 集合 $X$ から 集合 $Y$ への対応の時

$$\begin{array}{rcl} f : X & \to & Y \\ x & \mapsto & f(x) \end{array}$$

と書く，特に $x \mapsto f(x)$ は $X$ の要素 $x$ に $Y$ の要素 $f(x)$ を対応させるという意味である．関数 $f$ は，入力 $x \in X$ の値に対して，$x$ のみに依存した出力 $f(x) \in Y$ を出す（同じ入力には同じ出力を対応させる），なんかわからん $X$ から $Y$ への対応のことを言う．

集合 $X$ の要素のうち関数 $f$ に入力できる元の全体を $f$ の**定義域**（Domain of $f$）といい $D(f)$ で表す． $D(f) \subset X$ である．関数 $f$ が出力できる要素の全体を $f$ の**値域**（Rang of $f$）と呼び $R(f)$ で表す． $R(f) = \{f(x)\,;\, x \in D(f)\} \subset Y$ である．

問 1．次の関数 $f$ を A. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$，B. $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$，C. $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$，D. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ の対応と考えた場合の定義域と値域を求めよ．

(1) $f(x) = x^2$　(2) $f(x) = \sqrt{x}$　(3) $f(x) = \dfrac{1}{x}$　(4) $f(x) = \log x$

関数 $f : X \to Y$ と集合 $A \subset D(f)$ に対して，集合 $f(A)$ を

$$f(A) = \{f(x)\,;\, x \in A\} \subset Y$$

で定義する．つまり， $f(A)$ は定義域に含まれる集合 $A$ を 関数 $f$ で写した集合で，$f$ による $A$ の**像**という．集合 $A \subset B \subset D(f)$ に対して，$f(A) \subset f(B)$ が成立する．

逆の 「$f(A) \subset f(B)$ ならば $A \subset B$」 は成立しない．

例： $f : \{1, 2, 3\} \to \{a, b\}$ で，$f(1) = a, f(2) = b, f(3) = a$ となる関数 $f$ を考える．$A = \{1, 3\}, B = \{1, 2\}$ とすると， $f(A) = \{a\} \subset f(B) = \{a, b\}$ であるが， $A \subset B$ ではない．

問 2．$X = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 5\}$ から整数値 $Y = \mathbb{Z}$ への対応 $f(x) = |2x + 1|$ と $g(x) = |3x|$ と $h(x) = |3x + 1|$ について次の問いに答えよ．

(1) $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ の像を求めよ．

(2) $B = \{-5, -4, -3, -2, -1, 0\}$ の像を求めよ．

(3) $A \cap B$ の像を求めよ．

(4) $C = \{-5, -3, -1, 1, 3, 5\}$ の像を求めよ．

問 3．関数 $f$ と集合 $A, B \subset D(f)$ に対して，次のことを示せ．

(1) $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$ が成立する．

(2) $f(A \cap B) \supset f(A) \cap f(B)$ が成立しない例を挙げろ．

(3) $f(A \cup B) \subset f(A) \cup f(B)$ が成立する．

(4) $f(A \cup B) \supset f(A) \cup f(B)$ が成立する．

注意： 問 3 の (3),(4) より $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$ が成立する．

関数 $f : X \to Y$ と集合 $A \subset Y$ に対して， $f$ で集合 $A$ に写る定義域 $D(f) \subset X$ の要素の全体を，$f$ による $A$ の**逆像**といい $f^{-1}(A) \subset D(f)$ で書き表す．つまり，

$$f^{-1}(A) = \{x \in D(f)\,;\, f(x) \in A\}$$

このとき， $A \subset B \subset Y$ ならば $f^{-1}(A) \subset f^{-1}(B)$ である．

注意：一点集合 $\{y\} \subset Y$ に対する逆像 $f^{-1}(\{y\})$ は，一般には定義域 $D(f)$ の部分集合になり，一点集合にならないので，$f^{-1}$ は $Y$ から $X$ への関数ではない．

問 4．問 2 で定義した関数 $f$, $g$ ,$h$ のそれぞれについて以下の逆像を求めよ．

(1) $A =$ 偶数全体 の逆像を求めよ．

(2) $B =$ 奇数全体 の逆像を求めよ．

(3) $C = 5$ 以下の整数の集合 の逆像を求めよ．

問 5．関数 $f$ と集合 $A, B \subset Y$ に対して，次のことを示せ．

(1) $f^{-1}(A \cap B) \subset f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$ が成立する．

(2) $f^{-1}(A \cap B) \supset f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$ が成立する．

(3) $f^{-1}(A \cup B) \subset f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$ が成立する．

(4) $f^{-1}(A \cup B) \supset f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$ が成立する．

注意： 問 5 の (1),(2) より $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$ が成立する．また，(3),(4) より $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$ が成立する．

問 5 .(1) の証明

$f^{-1}(A \cap B) \subset f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$ を示すには，“小さい方の集合の任意の要素が，大きい方の集合の要素である” ことを証明すればよい．そこで，任意の $x \in f^{-1}(A \cap B)$ をとる．すると，ある $y \in A \cap B$ で $f(x) = y$ となる $y$ が存在する．$f(x) = y \in A$ なので，$x \in f^{-1}(\{y\}) \subset f^{-1}(A)$ である．同様に，$f(x) = y \in B$ なので，$x \in f^{-1}(\{y\}) \subset f^{-1}(B)$ である．これらのことから，$x \in f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$ である．よって，問 5 .(1) が証明できた．