情報数学演習 No.3 —極限と微分—

問題１． もしあれば，次の極限値を求めよ．

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}$ (2) $\displaystyle\lim_{x\to 0} e^{1/x}$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ (4) $\displaystyle\lim_{x\to 0} x\sin\left(\frac{1}{x}\right)$

(5) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{9+x}-3}{x}$ (6) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x+1}{\sqrt{1+x^2}}$

(7) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2+x}\right)$ (8) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{x+5}{\sqrt{2x^2+3}}$

(9) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{4+2x+x^2}-2}{x}$ (10) $\displaystyle\lim_{x\to 0} e^{-1/x^2}$

(11) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{4+x}-2}$ (12) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+x+1}-1}{x}$

(13) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}(\sqrt{4+x}-\sqrt{x})$ (14) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}-x\right)$

極限

$$\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta}=\lim_{\theta\to 0}\frac{\theta}{\sin\theta}=1$$

が成立する． 更に，

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e,\qquad \lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$$

が成立する．また，指数関数 e^x と多項式 x^n ここで，$n\ge 1$ の整数を比べると，

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^n}{e^x}=0,\qquad \lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x}=0,$$

である．

問題２． もしあれば，次の極限値を求めよ．

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x}$ (2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin(1+x)-\sin 1}{x}$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x\sin\frac{1}{x}$ (4) $\displaystyle\lim_{x\to\pi/2}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\tan x$

(5) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{5x}\right)^x$ (6) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\{\log(x+1)-\log x\}$

問題３． 次の極限値が 1 になることを示せ．

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1,$ ヒント： $y=e^x$ とおいて次に $y-1=1/s$ とおけ

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)}{x}=1$

$\boxed{\text{微分の定義 1.}}$

関数 $f(x)$ が $x\to p$ の時，次の極限値が存在するなら $x=p$ で微分可能という．

$$f'(p)=\lim_{x\to p}\frac{f(x)-f(p)}{x-p}=\lim_{h\to 0}\frac{f(p+h)-f(p)}{h}$$

また，この極限値を $f'(p)$ と書き $f(x)$ の点 $x=p$ での微分係数（微係数）と呼ぶ．また定義域のすべての点で微分可能なとき，f は微分可能という．このとき，$f'(x)$ を f の導関数という．

問題４． もしあれば，次の関数の与えられた点での微係数を求めよ．

(1) $f(x)=x^2-3x+5,\ x=2$ (2) $f(x)=2x^3+5x,\ x=1$

(3) $f(x)=1/x,\ x=-2$ (4) $f(x)=\sqrt{x+3},\ x=1$

(5) $f(x)=|x|,\ x=0$ (6) $f(x)=|x|\,x,\ x=0$

問題５． $x=p$ で定義にしたがって微分せよ．

(1) $\sin x$ (2) $\cos x$ (3) x^3 (4) e^x

(5) $\log x$ (6) x^n (n は自然数) (7) $\frac{1}{x}$ (8) $\sqrt{x}$

注意: (4) と (5) は問題３．の極限を用いてよい．

問題６． 次の $x=0$ の近くで，$x=0$ でのみ連続な関数の $f(x)$ を $x=0$ で微分せよ．

(1) $f(x)=\begin{cases} x, & x\ :\text{有理数}\\ 0, & x\ :\text{無理数}\end{cases}$ (2) $f(x)=\begin{cases} x^2, & x\ :\text{有理数}\\ 0, & x\ :\text{無理数}\end{cases}$

(3) $f(x)=\begin{cases} \cos x, & x\ :\text{有理数}\\ 1, & x\ :\text{無理数}\end{cases}$ (4) $f(x)=\begin{cases} x\sin x, & x\ :\text{有理数}\\ 0, & x\ :\text{無理数}\end{cases}$

$f(x)$ と $g(x)$ が微分可能ならば，

$$(f(x)g(x))'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)\qquad \text{積の微分}$$

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}\qquad \text{商の微分}$$

$$f(g(x))'=f'(g(x))g'(x)\qquad \text{合成関数の微分}$$

が成立する．

問題７． 次の関数を微分せよ．

(1) $\sin^2 3x+\cos 5x$ (2) $\sin x\cdot\log 10x$

(3) $e^x\cos x$ (4) $\dfrac{\sin x}{e^x}$

(5) $\dfrac{\log x}{x}$ (6) $\sqrt{x}e^x$

(7) $\dfrac{\sin x}{x^2-\log x}$ (8) $x^{2/3}\cdot\cos x^2$

(9) $\dfrac{\cos x}{\sin x}$ (10) $\dfrac{x^2}{(x+2)^3}$