

情報数学演習 No.4 —微分と接線—

微分の定義 2.

関数 $f(x)$ が点 p で微分可能というのは、適当な実数 a と関数 $g(x)$ が存在して次の2条件を満たすことである。

1. $f(x) = f(p) + a \cdot (x - p) + g(x)$
2. $\lim_{x \rightarrow p} \frac{g(x)}{x - p} = 0$ が成り立つ。

このとき、 a を $f(x)$ の点 p における変化率、勾配、ヤコビ行列などと呼び、

$$f'(p), (Df)(p), \frac{df}{dx}(p)$$

などで表す。また、この a は、微分係数 $f'(p)$ と一致する。さらに、 $g(x)$ を無視した1次関数 $y = f(p) + a \cdot (x - p)$ をグラフ $f(x)$ の点 $(p, f(p))$ における接線という

注意：1. から $g(x)$ は $f(x)$ を一次関数 $f(p) + a \cdot (x - p)$ で近似した時の近似誤差である。
2. では、その近似誤差が、 $x \rightarrow p$ の時、一次関数より早く0に近づくことを表している。

問題1. 次の関数が、点 p で微分可能なことを、微分の定義 2. をつかって示せ。

- (1) $f(x) = x^2$ が、点 $p = -1$ で微分できること。
- (2) $f(x) = x^3 + 5x^2 - 4$ が、点 $p = 2$ で微分できること。
- (3) $f(x) = \cos x$ が、点 $p = 0$ で微分できること。

問題2. 次の関数 $f(x)$ の点 $x = p$ における接線の方程式を求めよ。

- (1) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1, \quad p = 2$
- (2) $f(x) = x \sin x, \quad p = \pi/2$
- (3) $f(x) = x \log x - \cos x, \quad p = \pi/4$
- (4) $f(x) = \sqrt{x^3 + 2x - 1}, \quad p = 2$
- (5) $f(x) = \log(x^3 + 1), \quad p = 2$

問題3. 次の関数 $f(x)$ の点 $(p, f(p))$ を含むところでの逆関数と最大の定義域を求めよ。

- (1) $f(x) = x^3 + 3, \quad p = 0$
- (2) $f(x) = x^2 + 6, \quad p = -2$
- (3) $f(x) = \log(x^2 + 4), \quad p = 1$
- (4) $f(x) = \sqrt{x^2 + 3}, \quad p = -5$

$y = f(x)$ は、点 p の近傍で単調増加連続関数とし、さらに点 p で微分可能で、 $f'(p) \neq 0$ ならば、逆関数 $g(x) = f^{-1}(x)$ も点 $f(p)$ で微分可能で、

$$g'(f(p)) = \frac{1}{f'(p)}$$

が成立する。(逆関数の微分)

問題4. $\sin x, \cos x, \tan x$ の $x = 0$ を含んだ部分の逆関数を $\text{Sin}^{-1}(x), \text{Cos}^{-1}(x), \text{Tan}^{-1}(x)$ とするとき、それぞれの逆関数の定義域と値域を求め、グラフを描け。

問題5. 次の関数の微分が右辺になることを示せ。(それぞれ \sin, \cos, \tan の逆関数)

- (1) $(\text{Sin}^{-1}(x))' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- (2) $(\text{Cos}^{-1}(x))' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
- (3) $(\text{Tan}^{-1}(x))' = \frac{1}{1+x^2}$

問題6. 次の関数を微分せよ。

- (1) $\text{Sin}^{-1}(x^2)$
- (2) $\text{Cos}^{-1}(\sin x)$
- (3) $\log(\text{Sin}^{-1}x)$
- (4) $\text{Cos}^{-1}(\log x)$
- (5) $\text{Tan}^{-1}(x^2 - 3x + 2)$
- (6) $\text{Tan}^{-1}\left(\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}\right)$

問題7. 次の関数を微分せよ。(対数微分)

- (1) x^x
- (2) $x^{\sin x}$
- (3) $(\log x)^{\cos x}$
- (4) $(1+3x)^{1/x}$
- (5) $x^{1/x}$
- (6) $x^{\log x}$

問題8. 次の関数の第2階導関数を求めよ。

- (1) $e^x \cos x$
- (2) e^{x^2}
- (3) $\log(\log x)$
- (4) $\sin x^2$
- (5) $\text{Sin}^{-1}x$

問題9. 次の関数の第 n 階導関数を求めよ。

- (1) x^5
- (2) $\log x$
- (3) $\sin x$
- (4) $x \log x$
- (5) $\cos x$