情報数学演習 No.5 —微分の定理—

中間値の定理

$f(x)$ が閉区間 $[a,b]$ で連続関数とすると，$f(a)$ と $f(b)$ の間の任意の値 m に対して，$f(c)=m$ となる $c\in[a,b]$ が少なくとも一つ存在する．

ロールの定理

$f(x)$ は閉区間 $[a,b]$ で連続で両端を除いた開区間 (a,b) で微分可能とし，また $f(a)=f(b)$ が成立すると仮定する．このとき，$f'(c)=0$ を満たす $c\in(a,b)$ が少なくとも一つ存在する．

平均値の定理

$f(x)$ は閉区間 $[a,b]$ で連続で両端を除いた開区間 (a,b) で微分可能とすると，

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c), \qquad c\in(a,b)$$

を満たす c が少なくとも一つ存在する．

コーシーの平均値の定理

$f(x)$, $g(x)$ は閉区間 $[a,b]$ で連続で両端を除いた開区間 (a,b) で微分可能とする．さらに，$g(a)\neq g(b)$ のとき，

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}, \qquad c\in(a,b)$$

を満たす c が少なくとも一つ存在する．

ロピタルの定理 1

$f(x)$, $g(x)$ は点 a の近傍で連続かつ微分可能とする．さらに，$f(a)=0$, $g(a)=0$ を満たすとき

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

が成立する．つまり，右辺の極限値が存在すれば左辺の極限値も存在して，両者は一致する．

ロピタルの定理 2

$f(x)$, $g(x)$ は区間 $(a,b]$ で連続かつ微分可能とする．さらに，$\lim_{x\to a+0} f(x)=\infty$, $\lim_{x\to a+0} g(x)=\infty$, および $g'(x)\neq 0$ を満たすとき

$$\lim_{x\to a+0}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a+0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

が成立する．つまり，右辺の極限値が存在すれば左辺の極限値も存在して，両者は一致する．

テーラーの定理

関数 $f(x)$ が 点 a を含む 開区間 $I=(c,d)$ で $n+1$ 階微分できるとせよ．すると任意の $x\in I$ に対して，点 a と x の間の b が取れて，(点 b は x に依る）

$$f(x)=f(a)+\sum_{k=1}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k+\frac{f^{(n+1)}(b)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

が成立する．これをテーラーの展開という．この展開は関数を点 a で n 次の多項式として近似したもので，最終項の $\frac{f^{(n+1)}(b)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$ は剰余項と呼ばれ，多項式近似したときの誤差を表す．

テーラーの定理の証明は，

$$F(x)=f(x)-\left\{f(a)+\sum_{k=1}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k\right\}$$

と置いたとき $F(x)$ が剰余項になることを言えばよい．いま，$F(a)=F'(a)=F^{(2)}(a)=\cdots=F^{(n)}(a)=0$ と $F^{(n+1)}(x)=f^{(n+1)}(x)$ が成立する．また，$G(x)=(x-a)^{n+1}$ と置くと，$G(a)=G'(a)=G^{(2)}(a)=\cdots=G^{(n)}(a)=0$ で $G^{(n+1)}(x)=(n+1)!$ である．$F(a)=G(a)=0$ だから，コーシーの平均値の定理を使うと，

$$\frac{F(x)}{G(x)}=\frac{F(x)-F(a)}{G(x)-G(a)}=\frac{F'(x_1)}{G'(x_1)}$$

が成り立つような a と x の間の数 x_1 が取れる．さらに，$F'(a)=G'(a)=0$ だから，上式の右辺は，

$$\frac{F'(x_1)}{G'(x_1)}=\frac{F'(x_1)-F'(a)}{G'(x_1)-G'(a)}=\frac{F^{(2)}(x_2)}{G^{(2)}(x_2)}=\frac{F^{(2)}(x_2)-F^{(2)}(a)}{G^{(2)}(x_2)-G^{(2)}(a)}=\frac{F^{(3)}(x_3)}{G^{(3)}(x_3)}$$

であり，この操作を続けると

$$\frac{F(x)}{G(x)}=\frac{F^{(n+1)}(b)}{G^{(n+1)}(b)}=\frac{f^{(n+1)}(b)}{(n+1)!}$$

となり，テーラーの定理が証明できた．