

情報数学演習 No.6 —微分の利用—

問題1. $f(x)$ が区間 $[a, b]$ で1階微分できるとせよ. 平均値の定理を使う.

- (1) $f'(x) \equiv 0$ ならば $f(x)$ は区間 $[a, b]$ で定数関数になることを示せ.
- (2) $f'(x) > 0$ ならば $f(x)$ は区間 $[a, b]$ で単調増大になることを示せ.

問題2. $f(x)$ は, 区間 $[a, b]$ で2階微分できて, 全ての $x \in [a, b]$ で $f''(x) > 0$ とすると, $a < y < b$ なる y にたいして,

$$f(y) \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(y - a) + f(a)$$

が成立することを示せ. (下に凸)

問題3. 次の関数のグラフを描け.

- | | | |
|--|-------------------------|--------------------------------|
| (1) $2x^3 - 3x^2 + 36x + 8$ | (2) $\frac{x+1}{x^2+1}$ | (3) $\log(x^2+1)$ |
| (4) $(1 + \cos x) \sin x \quad (0 \leq x \leq 2\pi)$ | (5) $x^2 e^{-x}$ | (6) $x^2 \log x \quad (x > 0)$ |
| (7) $x \sin(x) \quad (0 \leq x \leq 2\pi)$ | (8) $x e^{-x^2}$ | (9) $\frac{2}{(x-2)^2}$ |

問題4. 次の不等式が成立することを示せ.

- | | |
|---|---|
| (1) $\tan x \geq x \quad (0 \leq x < \pi/2)$ | (2) $\log(1+x) \leq x \quad (x \geq 0)$ |
| (3) $\log(1+x) \geq x - x^2 \quad (x \geq 0)$ | (4) $e^x \geq 1 + x + \frac{x^2}{2} \quad (x \geq 0)$ |
| (5) $\cos x \geq 1 - \frac{x^2}{2}$ | (6) $\sin x \geq x - \frac{x^3}{3!} \quad (x \geq 0)$ |

問題5. 次の極限值を求めよ.

- | | | |
|--|--|--|
| (1) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin^{-1}(1-x)}{\cos(\pi x/2)}$ | (2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin^{-1}x}{x^3}$ | (3) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^x - ex}{x \log x - x + 1}$ |
| (4) $\lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{e^{\sin x} - e}{\log(\sin x)}$ | (5) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x - \sin x}{x^3 - x}$ | (6) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\log(x^2 + 3)}$ |
| (7) $\lim_{x \rightarrow +0} x \log x$ | (8) $\lim_{x \rightarrow +0} x(\log x)^2$ | (9) $\lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{\log(x-1)}{\log(x^3-1)}$ |
| (10) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log x}{x}$ | (11) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{e^x}$ | (12) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin(x)}{x}$ |

問題6. 次の関数 $f(x)$ について, 次のことを示せ.

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

- (1) $f(x)$ は原点で微分できて, $f'(0) = 0$ である. (1階微分できる)
- (2) $f''(0) = 0$ が成り立つ. (2階微分できる)

問題7. 次の関数を与えられた点の回りでテイラー展開し3次の項まで求めよ.

- | | | |
|-----------------------|--------------------------|--|
| (1) $x^4 \quad (x=0)$ | (2) $e^x \quad (x=0)$ | (3) $x \cos x \quad (x=0)$ |
| (4) $e^x \quad (x=1)$ | (5) $\log x \quad (x=1)$ | (6) $\frac{1}{\sqrt{1-x}} \quad (x=0)$ |

$f(x)$ が $x=p$ で極大値をとるというのは, ある $\delta > 0$ が取れて, 全ての $y \in (p-\delta, p+\delta)$, $y \neq p$ に対して, $f(y) < f(p)$ が成立することを言う. つまり, 極大値とは $f(p)$ が $x=p$ の近くで一番大きいこと.

$f(x)$ が $x=p$ で極小値でというものは, ある $\delta > 0$ が取れて, 全ての $y \in (p-\delta, p+\delta)$, $y \neq p$ に対して, $f(y) > f(p)$ が成立することを言う. つまり, 極小値とは $f(p)$ が $x=p$ の近くで一番小さいこと.

なを, 区間 $[a, b]$ の端点 a では, $y \in (a, a+\delta)$ となり, 端点 b では, $y \in (b-\delta, b)$ である.

問題8. 次のグラフのもしあれば極大・極小・最大・最小を求めよ.

