情報数学演習　No.8 —積分の理論と広義積分—

問題１．　$x > 0$ に対して，関数 $f(t) = 1/t$ の 1 から x までの面積：$\displaystyle\int_1^x f(t)\,dt$ の値を $\log(x)$ と書いたとき，$\log(x)$ が次の性質を満たすことを示せ．

(1) $x, y > 0$ にたいし，$\log(xy) = \log(x) + \log(y)$ を証明せよ．

(2) $x > 0$ にたいし，$\log(\frac{1}{x}) = -\log(x)$ を証明せよ．

(3) $x > 0$ と n 整数 にたいし，$\log(x^n) = n\log(x)$ を証明せよ．

(4) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \log(x) = \infty$ を示せ．

問題２．　次の関数 $F(x)$ にたいし，極限

$$F(x) = \int_0^x \frac{t}{(t+1)(t+3)}\,dt$$

$$\lim_{x\to\infty}(F(x) - \log x)$$

を計算せよ．

広義積分

定積分 $\int_a^b f(x)\,dx$ の積分範囲 $[a,b]$ で関数 $f(x)$ が有界でない場合 つまり，

$$c \in [a,b] \qquad \lim_{x\to c}|f(x)| = \infty$$

のような c を積分区間に含む場合，その積分を広義積分とよぶ．

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{y_1\to c-0}\int_a^{y_1} f(x)\,dx + \lim_{y_2\to c+0}\int_{y_2}^b f(x)\,dx$$

上式右辺の極限値が存在するとき，広義積分は定義できるといい，積分 $\int_a^b f(x)\,dx$ を右辺の極限で定義する．

問題３．　次の広義積分が存在するなら，求めよ．

(1) $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{1}{x}\,dx$　(2) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$　(3) $\displaystyle\int_0^1 x\ \log x\,dx$

(4) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$　(5) $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2}\,dx$　(6) $\displaystyle\int_0^1 \log x\,dx$

(7) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x(x-1)}\,dx$　(8) $\displaystyle\int_{-2}^2 x^{-1/3}\,dx$　(9) $\displaystyle\int_0^3 \frac{x}{\sqrt{3-x}}\,dx$

無限積分

積分範囲が $[a,\infty)$ と無限大を含む積分を

$$\int_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{t\to\infty}\int_a^t f(x)\,dx$$

で定義する．右辺の極限が存在するとき，無限積分 $\int_a^\infty f(x)\,dx$ は収束するという．

問題４．　無限積分が収束すれば，値を求めよ．

(1) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x}\,dx$　(2) $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x}\,dx$　(3) $\displaystyle\int_0^\infty xe^{-x}\,dx$

(4) $\displaystyle\int_3^\infty \frac{1}{x^2}\,dx$　(5) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{1+x^2}\,dx$　(6) $\displaystyle\int_1^\infty x^{-3/2}\,dx$

(7) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{e^x}{(e^x+3)^2}\,dx$　(8) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{1+e^x}\,dx$　(9) $\displaystyle\int_0^\infty \sin x\,dx$

問題５．　$x > 0$ とするとき，次の積分

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}\,dt$$

をガンマ関数という．このとき，整数 $n \geq 1$ に対し，

$$\Gamma(n) = (n-1)!$$

となることを示せ．