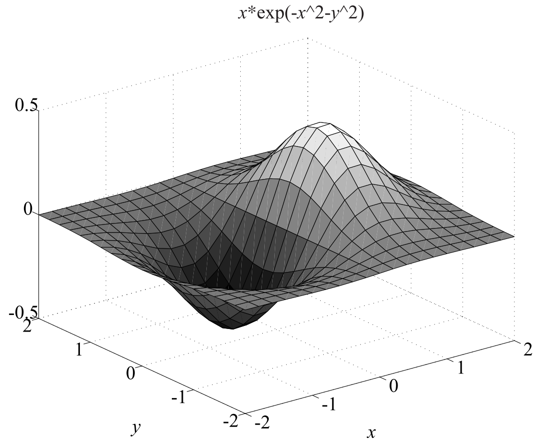
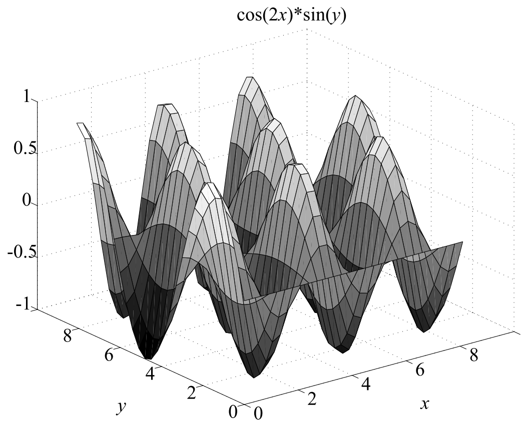
情報数学演習 No.9 —２変数関数　その１—

このプリントでは，xy 平面上の点 $X=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ を変数とする関数 $f(X)=f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ を考える．変数が x, y の 2 つなので２変数関数という．

例として，関数 $f(X)=f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=x\exp(-x^2-y^2)$ のグラフと $f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\cos(2x)\sin(y)$ の $[0,2\pi]\times[0,2\pi]$ の範囲のグラフを描く．



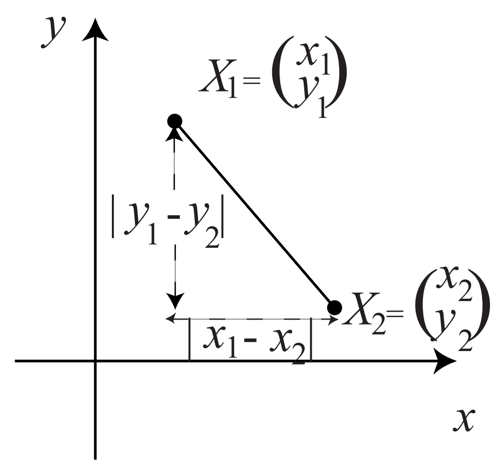


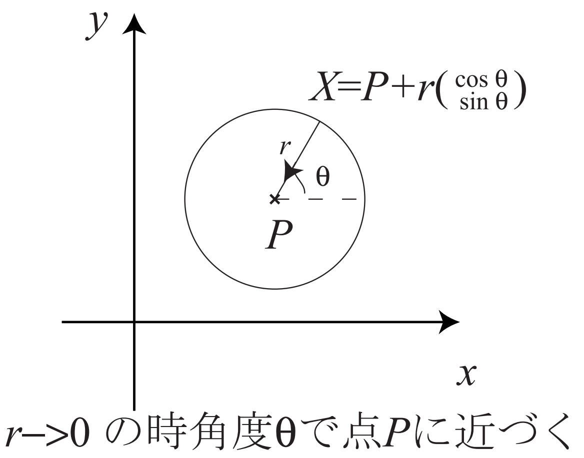
さて，xy 平面の上に z 軸方向に関数値がのっているグラフが描けた．曲面でつながっているのはこれらの関数が連続関数だからだ．2 変数関数の微積分をおこなうのが本授業の後半の課題である．

定義１．　点 $X_1=\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ と点 $X_2=\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$ の 2 点間の距離 $|X_1-X_2|$ を，

$$|X_1-X_2|=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$$

で測る．この距離は直角三角形の斜辺の長さになっている．





定義２．　変数 $X=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ が点 $P=\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$ に近づくことを，記号 $X\to P$ と記す．この意味は，変数 X があらゆる方向から点 P に近づくことをいう．方向角を θ とすると点 P から方向 θ 距離 $r>0$ の点 X は，

$$X=P+r\begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}$$

と書けるから，$X\to P$ は，任意の方向角 $0\le\theta<2\pi$ に対して，$r\to 0$ のことを言う．

注意．１変数関数では $x\to p$ は，変数 x が点 p の左右（小さい方と大きい方）から近づくことを言うが，２変数では近づく方向の自由度が円周分増えた．この自由度は，角度 θ を任意に取ることで達成できる．

定義３．　２変数関数 $f(X)=f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ と点 $P=\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$ に対して，

$$\lim_{X\to P} f(X)=B$$

というのは，任意の方向角 θ に対して，$r>0$ として，

$$\lim_{r\to 0} f\begin{pmatrix} p+r\cos\theta \\ q+r\sin\theta \end{pmatrix}$$

の極限が θ によらず一定の値 B に収束する場合をいう．

問題１．原点を $O=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ とする．$X=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\to O$ のとき次の極限値があれば求めよ．

(1) $\displaystyle\lim_{X\to O}\frac{x}{x^2+y^2}$　(2) $\displaystyle\lim_{X\to O}\frac{xy}{x^2+y^2}$　(3) $\displaystyle\lim_{X\to O}\frac{x^2y}{x^2+y^2}$

(4) $\displaystyle\lim_{X\to O}\frac{y^3}{x^2+y^2}$　(5) $\displaystyle\lim_{X\to O}\frac{x+y}{x^2+y^2}$　(6) $\displaystyle\lim_{X\to O}\frac{x^2}{x^2+y^2}$

定義４．　２変数関数 $f(X)=f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ が点 $P\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$ で連続というのは，

$$\lim_{X\to P} f(X)=f(P)$$

が成立する事を言う．つまり，左辺の極限値が存在して $f(P)$ に等しくなる場合．考えている範囲のすべての点で連続なとき $f(X)$ を連続関数という．

問題２．　（連続性）

(1) $f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=x$ は，点 $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ で連続であることを示せ．

(2) $f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=x+y$ は，点 $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ で連続であることを示せ．

(3) $f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=xy$ は，点 $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ で連続であることを示せ．

(4) $f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=x^2+y$ は，点 $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ で連続であることを示せ．