留数計算で逆ラプラス変換

守本晃

1 逆ラプラス変換

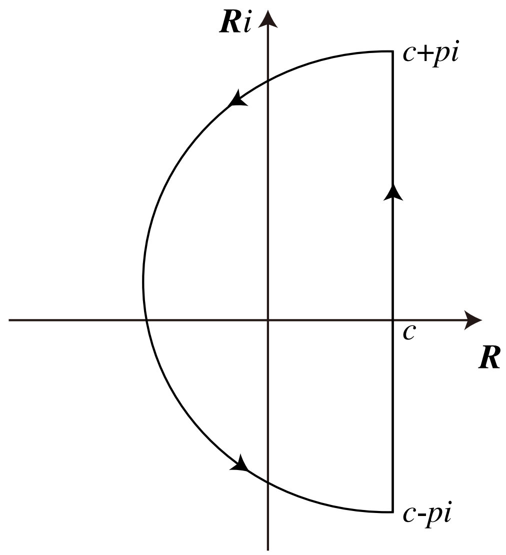

図 1: 逆ラプラス変換の複素積分の積分経路 C.

定理 1.1. 関数 $x(t)$ のラプラス変換 $X(s) = \mathcal{L}[x](s)$ に対して，図 1 の積分経路で複素積分を行い $p \to \infty$ の極限を取る．つまり，

$$x(t) = \lim_{p\to\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{c-ip}^{c+ip} X(s)\, e^{st}\, ds \tag{1.1}$$

で元の $x(t)$ に戻る．ただし，$c \in \mathbb{R}$, $c > 0$ は，複素平面 s を考えたとき，$X(s)$ の全ての特異点が直線 $s = c$ の左側に来るように選ぶ．これを**逆ラプラス変換**（*the inverse Laplace transform*）と呼ぶ.

注意 1.2. 定理 1.1 は，複素平面上で $X(s)$ の極を求めて，留数定理を使うだけなので，$X(s)$ を部分分数に展開して逆ラプラス変換表を使って行う逆変換と結局同じことを難しく書いただけである．積分経路 C の中に $X(s)$ の全ての極が含まれれば，その経路 C で逆変換できる．

2 留数計算

領域 Ω の任意の複素数 $a \in \Omega$ の周りでテーラー展開できる複素関数を解析関数と呼ぶ.

$f(z)$ が領域 Ω 内の孤立特異点 $z = a$ を除いて，解析的であるとする．積分路 $\gamma \subset \Omega$ を点 $z = a$ を中心とする十分小さい円周を正の向きに回る単純閉曲線とする．このとき $z = a$ における $f(z)$ の留数を

$$\operatorname*{Res}_{z=a} f(z) := \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma f(z)dz \tag{2.1}$$

で定義する．このとき，$f(z)$ は，孤立特異点 $z = a$ の周りでローラン展開

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-z)^n \tag{2.2}$$

できる．この展開は，$z = a$ を中心とするある円環領域上で一様収束するから，γ 上で項別積分できて，

$$\oint_\gamma f(z)dz = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \oint_\gamma a_n(z-z)^n dz = 2\pi i a_{-1}$$

である．コーシーの積分定理を使った．よって，

$$a_{-1} = \operatorname*{Res}_{z=a} f(z)$$

である．さて，孤立特異点 $z = a$ が $f(z)$ の K 位の極の場合には，$(z-a)^K f(z)$ は $z = a$ でテーラー展開できる．ローラン展開式 (2.2) と比較すると，

$$(z-a)^K f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n-K}\,(z-a)^n \tag{2.3}$$

を得る．右辺で a_{-1} が現れるのは $(z-a)^{K-1}$ の展開係数なので，左辺 $(z-a)^K f(z)$ をテーラー展開し $(z-a)^{K-1}$ の展開係数を求めればよい．つまり，

$$a_{-1} = \frac{1}{(K-1)!} \lim_{z\to a} \frac{d^{K-1}}{dz^{K-1}} \left[(z-a)^K f(z)\right]. \tag{2.4}$$

3 留数計算による逆ラプラス変換

ラプラス変換 $X(s)$ は，孤立特異点として N 個の極のみ $s = a_1, \ldots, a_N$ を持ち，極を除いた全複素平面で解析的であると仮定する．極の位相をそれぞれ $K_1, \ldots, K_N$ とする．

逆ラプラス変換式 (1.1) の e^{st} は，解析関数なので，逆ラプラス変換式 (1.1) は，$X(s)$ の全ての極における $X(s)e^{st}$ の留数を計算して，足し合わせれば得られる．つまり，

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}[X(s)](t) = \sum_{n=1}^{N} \operatorname*{Res}_{s=a_n} X(s)e^{st}. \tag{3.1}$$

4　逆ラプラス変換の例

問題．次の関数逆ラプラス変換を求めよ．ただし，$a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq b$, $c > 0$.

1) $X_1(s) = \dfrac{1}{(s-a)^3}$,　　2) $X_2(s) = \dfrac{1}{(s-a)(s-b)^2}$,　　3) $X_3(s) = \dfrac{1}{s^2+c^2}$

1) $X_1(s)$ は，$s = a$ で $K = 3$ 位の極を持つから，逆ラプラス変換は，

$$\begin{aligned} x_1(t) &= \frac{1}{(K-1)!} \lim_{s\to a} \frac{d^{K-1}}{ds^{K-1}} \left[(s-a)^K X_1(s) e^{st}\right] \\ &= \frac{1}{2!} \lim_{s\to a} \frac{d^2}{ds^2} \left[e^{st}\right] = \frac{1}{2} \lim_{s\to a} t^2\, e^{st} = \frac{t^2\, e^{at}}{2} \end{aligned}$$

2) $X_2(s)$ は，$s = a$ で 1 位の極と，$s = b$ で 2 位の極を持つから，逆ラプラス変換は，

$$\begin{aligned} x_2(t) &= \lim_{s\to a} \left[(s-a) X_2(s) e^{st}\right] + \frac{1}{(1)!} \lim_{s\to b} \frac{d}{ds} \left[(s-b)^2 X_2(s) e^{st}\right] \\ &= \frac{e^{at}}{(a-b)^2} + \lim_{s\to b} \frac{d}{ds} \left[\frac{e^{st}}{(s-a)}\right] = \frac{e^{at}}{(a-b)^2} + \lim_{s\to b} \left[\frac{te^{st}}{(s-a)} - \frac{e^{st}}{(s-a)^2}\right] \\ &= \frac{e^{at}}{(a-b)^2} + \frac{te^{bt}}{(b-a)} - \frac{e^{bt}}{(b-a)^2} \end{aligned}$$

3) $X_3(s) = \dfrac{1}{(s-ci)(s+ci)}$ は，$s = ci,\ -ci$ にそれぞれ 1 位の極を持つから，逆ラプラス変換は，

$$\begin{aligned} x_3(t) &= \lim_{s\to ci} \left[(s-ci) X_3(s) e^{st}\right] + \lim_{s\to -ci} \left[(s+ci) X_3(s) e^{st}\right] \\ &= \lim_{s\to ci} \frac{e^{st}}{s+ci} + \lim_{s\to -ci} \frac{e^{st}}{s-ci} = \frac{e^{cit}}{2ci} - \frac{e^{-cit}}{2ci} = \frac{e^{cit}-e^{-cit}}{2ci} = \frac{\sin(ct)}{c} \end{aligned}$$

問題．次の関数逆ラプラス変換を求めよ．ただし，$a,\ b \in \mathbb{R}$, $a \neq b$, $c > 0$.

4) $X_4(s) = \dfrac{1}{(s-a)(s^2+c^2)}$,　　5) $X_5(s) = \dfrac{1}{(s^2+c^2)^2}$,　　6) $X_6(s) = \dfrac{1}{(s-a)^2(s-b)^2}$

4) $X_4(s) = \dfrac{1}{(s-a)(s-ci)(s+ci)}$ は，$s = a,\ ci,\ -ci$ でそれぞれ 1 位の極を持つから，逆ラプラス変換は，

$$\begin{aligned} x_4(t) &= \lim_{s\to a} \left[(s-a) X_4(s) e^{st}\right] + \lim_{s\to ci} \left[(s-ci) X_4(s) e^{st}\right] + \lim_{s\to -ci} \left[(s+ci) X_4(s) e^{st}\right] \\ &= \frac{e^{at}}{(a-ci)(a+ci)} + \frac{e^{cit}}{(ci-a)2ci} + + \frac{e^{-cit}}{(-ci-a)(-2ci)} \\ &= \frac{e^{at}}{(a-ci)(a+ci)} + \frac{-(a+ci)e^{cit} + (a-ci)e^{-cit}}{(a-ci)(a+ci)2ci} \\ &= \frac{e^{at}}{a^2+c^2} - \frac{a}{(a^2+c^2)c} \frac{e^{cit}-e^{-cit}}{2i} - \frac{1}{a^2+c^2} \frac{e^{cit}+e^{-cit}}{2} \\ &= \frac{e^{at}}{a^2+c^2} - \frac{a\sin(ct)}{(a^2+c^2)c} - \frac{\cos(ct)}{a^2+c^2} \end{aligned}$$

5) $X_5(s) = \dfrac{1}{(s^2+c^2)^2} = \dfrac{1}{(s-ci)^2(s+ci)^2}$ は，$s = ci,\ -ci$ でそれぞれ 2 位の極を持つから，逆ラプラス変換は，

$$\begin{aligned} x_5(t) &= \lim_{s\to ci} \frac{d}{ds} \left[(s-ci)^2 X_5(s) e^{st}\right] + \lim_{s\to -ci} \frac{d}{ds} \left[(s+ci)^2 X_5(s) e^{st}\right] \\ &= \lim_{s\to ci} \frac{d}{ds} \left[\frac{e^{st}}{(s+ci)^2}\right] + \lim_{s\to -ci} \frac{d}{ds} \left[\frac{e^{st}}{(s-ci)^2}\right] \\ &= \lim_{s\to ci} \left[\frac{te^{st}}{(s+ci)^2} - 2\frac{e^{st}}{(s+ci)^3}\right] + \lim_{s\to -ci} \left[\frac{te^{st}}{(s-ci)^2} - 2\frac{e^{st}}{(s-ci)^3}\right] \\ &= \frac{te^{cit}}{(2ci)^2} - 2\frac{e^{cit}}{(2ci)^3} + \frac{te^{-cit}}{(-2ci)^2} - 2\frac{e^{-cit}}{(-2ci)^3} \\ &= -\frac{t(e^{cit}+e^{-cit})}{4c^2} + 2\frac{e^{cit}-e^{-cit}}{8c^3 i} \\ &= \frac{-t}{2c^2} \frac{e^{ict}+e^{-ict}}{2} + \frac{1}{2c^3} \frac{e^{ict}-e^{-ict}}{2i} \\ &= \frac{-t\cos(ct)}{2c^2} + \frac{\sin(ct)}{2c^3} \end{aligned}$$

6) $X_6(s) = \dfrac{1}{(s-a)^2(s-b)^2}$ は，$s = a,\ b$ にそれぞれ 2 位の極を持つから，逆ラプラス変換は，

$$\begin{aligned} x_6(t) &= \lim_{s\to a} \frac{d}{ds} \left[(s-a)^2 X_6(s) e^{st}\right] + \lim_{s\to b} \frac{d}{ds} \left[(s-b)^2 X_6(s) e^{st}\right] \\ &= \lim_{s\to a} \frac{d}{ds} \left[\frac{e^{st}}{(s-b)^2}\right] + \lim_{s\to b} \frac{d}{ds} \left[\frac{e^{st}}{(s-a)^2}\right] \\ &= \lim_{s\to a} \left[\frac{te^{st}}{(s-b)^2} - 2\frac{e^{st}}{(s-b)^3}\right] \lim_{s\to b} \left[\frac{te^{st}}{(s-a)^2} - 2\frac{e^{st}}{(s-a)^3}\right] \\ &= \frac{te^{at}}{(a-b)^2} - 2\frac{e^{at}}{(a-b)^3} + \frac{te^{bt}}{(b-a)^2} - 2\frac{e^{bt}}{(b-a)^3} \\ &= \frac{t(e^{at}+e^{bt})}{(a-b)^2} - 2\frac{e^{at}-e^{bt}}{(a-b)^3} \end{aligned}$$