

現代制御理論入門

守本晃

1 はじめに

現代制御理論 (Modern control theory) では, 連立定数係数一階線形常微分方程式 (System of first order linear ordinary differential equations with constant coefficients) を取り扱う. ベクトル値関数は, 太文字 $(\mathbf{x}(t), \mathbf{u})$ で表す. ベクトル \mathbf{x} と行列 A の転置を \mathbf{x}^T, A^T と書く.

「 m 入力, p 出力, n 次線形システム」とよばれる次の連立定数係数一階線形常微分方程式を考えよう.

定義 1.1 (m 入力, p 出力, n 次線形システム). 時間のベクトル値関数を

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(t) &= (u_1(t), \dots, u_m(t))^T && : m \text{ 次縦 入力ベクトル} \\ \mathbf{y}(t) &= (y_1(t), \dots, y_p(t))^T && : p \text{ 次縦 出力ベクトル} \\ \mathbf{x}(t) &= (x_1(t), \dots, x_n(t))^T && : n \text{ 次縦 状態ベクトル} \end{aligned}$$

と名付ける. 定数行列 $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$, $D \in \mathbb{R}^{p \times m}$ に対して, 状態方程式と出力方程式のペア

$$\mathbf{x}'(t) = \frac{d}{dt} \mathbf{x}(t) = A\mathbf{x}(t) + B\mathbf{u}(t) \quad : \text{状態方程式} \quad (1.1)$$

$$\mathbf{y}(t) = C\mathbf{x}(t) + D\mathbf{u}(t) \quad : \text{出力方程式} \quad (1.2)$$

を m 入力, p 出力, n 次線形システムとよぶ.

注意 1.2. 状態方程式と出力方程式のペアをひとまとめにして,

$$\begin{pmatrix} \mathbf{x}'(t) \\ \mathbf{y}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \mathbf{u}(t) \end{pmatrix} \quad (1.3)$$

と記述する場合もある.

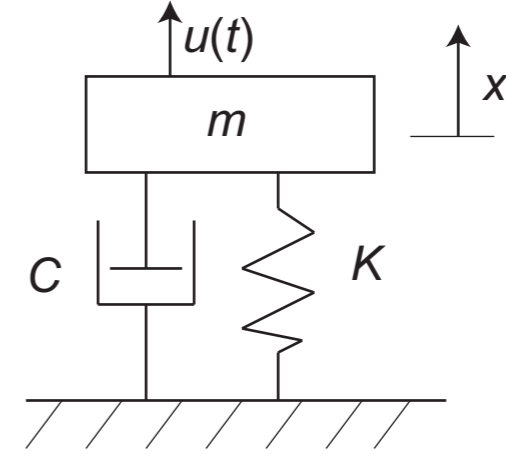


図 1: バネ・ダンパー系, 外部からかかる力 $u(t)$, 質点の位置 $x(t)$.

例 1.3 (バネ・ダンパー系). バネとダンパーからなる図 1 を考えよう. 質点の位置を $x(t)$, 外部からかかる力 (入力) を $u(t)$ とすると, 微分方程式

$$m\ddot{x}(t) + C\dot{x}(t) + Kx(t) = u(t) \quad (1.4)$$

に従う. これをベクトル値の状態変数 $\mathbf{x}(t) = (x(t), x'(t))^T$ を用いて,

$$\begin{aligned} \mathbf{x}'(t) &= \begin{pmatrix} x'(t) \\ x''(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'(t) \\ -\frac{C}{m}x'(t) - \frac{K}{m}x(t) + \frac{1}{m}u(t) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -K/m & -C/m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ x'(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1/m \end{pmatrix} u(t) \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -K/m & -C/m \end{pmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1/m \end{pmatrix} u(t) \end{aligned} \quad (1.5)$$

と状態方程式の形に変形できる. 位置 $x(t)$ を出力と見なす場合には, 出力方程式は,

$$\mathbf{y}(t) = x(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ x'(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix} u(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix} u(t) \quad (1.6)$$

と記述できる.

例 1.3 から推測できるように，入力 $u(t)$ と出力 $y(t)$ との関係が， N 階の定数係数線形常微分方程式

$$y^{(N)} + a_{N-1}y^{(N-1)} + \dots + a_0y = u(t)$$

で記述できる場合を考えよう．このとき状態変数として

$$\mathbf{x} = (y(t), y'(t), \dots, y^{(N-1)}(t))^T$$

を考えると，状態方程式

$$\mathbf{x}'(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ & & & \ddots & & 0 \\ & 0 & & & & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & -a_3 & \dots & -a_{N-1} \end{pmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u(t)$$

で記述できる．出力 $y(t)$ は， \mathbf{x} の第 1 成分なので，

$$y(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x}(t) + 0u(t)$$

と出力方程式の形で記述できる．

2 定数係数一階線形常微分方程式の解法

ベクトル値の状態変数に関する微分方程式を考える前に，実数値の定数係数一階線形常微分方程式の解法を復習しよう．扱う問題は，次の微分方程式の初期値問題の解 $x(t)$ を見つけることである．

$$x'(t) + ax(t) = u(t), \quad x(0) = x_0. \quad (2.1)$$

ただし， a は定数とする．普通に解く場合とラプラス変換を用いて解く場合を復習する．

2.1 普通に解く場合

外部入力 $u(t)$ が 0 の場合を斉次方程式とよぶ．斉次方程式

$$x'(t) + ax(t) = 0 \quad \rightarrow \quad x'(t) = -ax(t)$$

の解は，微分が $-a$ 倍になる関数なので $x(t) = Ce^{-at}$ とかける．そこで，微分方程式 (2.1) の解が $x(t) = e^{-at}v(t)$ の形であると仮定して，微分方程式 (2.1) に代入すると，

$$x'(t) + ax(t) = -ae^{-at}v(t) + e^{-at}v'(t) + ae^{-at}v(t) = e^{-at}v'(t) = u(t)$$

がえられる．したがって，

$$v'(t) = e^{at}u(t)$$

となるが，右辺は t のみの関数なので，そのまま両辺を t で積分すれば良い．初期値は， $x(0) = e^{-a \cdot 0}v(0) = v(0) = x_0$ であるから，

$$v(t) = \int_0^t e^{a\tau}u(\tau)d\tau + x_0$$

となる．したがって，微分方程式 (2.1) の解は，

$$x(t) = e^{-at}v(t) = e^{-at} \int_0^t e^{a\tau}u(\tau)d\tau + e^{-at}x_0$$

である．これが，微分方程式 (2.1) の普通の解法である．

2.2 ラプラス変換を用いた解法

微分方程式 (2.1) の両辺をラプラス変換する．初期値 $x(0) = x_0$ なので，

$$x'(t) + ax(t) = u(t), \quad x(0) = x_0$$

↓ Laplace transform

$$sX(s) - x_0 + aX(s) = U(s)$$

$$X(s) = \frac{U(s)}{s+a} + \frac{x_0}{s+a}$$

$X(s)$ を逆ラプラス変換すれば、微分方程式の解 $x(t)$ が求まる。ここで、 $\mathcal{L}[f(t)](s) = F(s)$ としたときの逆ラプラス変換の公式

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{F(s)}{s}\right] = \int_0^t f(\tau)d\tau, \quad \mathcal{L}^{-1}[F(s+a)] = e^{-at}f(t)$$

を使うと、

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{F(s)}{s+a}\right] &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{F(s+a-a)}{s+a}\right] \\ &= e^{-at}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{F(s-a)}{s}\right] \\ &= e^{-at}\int_0^t e^{a\tau}f(\tau)d\tau \end{aligned}$$

である。したがって、微分方程式 (2.1) の解は、

$$x(t) = e^{-at}\int_0^t e^{a\tau}u(\tau)d\tau + e^{-at}x_0$$

である。

3 状態方程式の解法

微分して定数倍になる（微分方程式 $x' = ax$, $x(0) = x_0$ を満たす）関数は、指数関数 $x(t) = e^{at}x_0$ である。ベクトル値関数 $\mathbf{x}(t)$ を n 次縦ベクトル、 A は $n \times n$ の定数行列とし、微分方程式

$$\mathbf{x}'(t) = A\mathbf{x}(t), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \quad (3.1)$$

を満たす解を $\mathbf{x}(t) = e^{At}\mathbf{x}_0$ と記述できると都合が良い。

3.1 行列の指数関数

指数関数 e^t を 0 の回りでテーラー展開すると、

$$e^t = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}t^k$$

であり、収束半径は ∞ になる。

定義 3.1 (行列指数関数 e^{At}). n 次正方行列 A に対する行列指数関数を

$$e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}A^k t^k = I + At + \frac{1}{2!}A^2 t^2 + \dots \quad (3.2)$$

で定義する。ただし、 t はスカラー、 I は n 次単位行列である。

行列 A の作用素ノルムを

$$\|A\| = \sup_{\|\mathbf{x}\|=1} \|A\mathbf{x}\|$$

とする。ただし、 $\|\mathbf{x}\|$ はベクトル \mathbf{x} の 2 乗ノルムとする。また行列 $A = (a_{ij})$ の max ノルムを

$$\|A\|^\infty = \max |a_{ij}|$$

とする。 A^k は、 n 次正方行列であり、その各成分の絶対値は、 $(n\|A\|^\infty)^k$ で押さえられるので、無限和 (3.2) の行列の各成分は絶対収束し、収束半径は ∞ である。

命題 3.2. 行列の指数関数 e^{At} は、次の性質を満たす。

1. $e^{A0} = I$
2. $e^{A(t+s)} = e^{At}e^{As}$
3. $(e^{At})^{-1} = e^{-At}$
4. $\frac{d}{dt}e^{At} = Ae^{At}$

1. は、式 (3.2) の右辺に $t = 0$ を代入すると、 $e^{A0} = I$ が成立する。

2. は、 $e^{At}e^{As}$ の N 次の項を寄せ集めると

$$\begin{aligned} (N \text{ 次の項}) &= \sum_{k=0}^N \frac{1}{k!}A^k t^k \frac{1}{(N-k)!}A^{N-k} s^{N-k} \\ &= \frac{1}{N!}A^N \sum_{k=0}^N \frac{N!}{k!(N-k)!}t^k s^{N-k} \\ &= \frac{1}{N!}A^N \sum_{k=0}^N {}_N C_k t^k s^{N-k} = \frac{1}{N!}A^N (t+s)^N \end{aligned}$$

なので, $e^{A(t+s)} = e^{At}e^{As}$ が成立する.

3. は,

$$I = e^{A0} = e^{A(t-t)} = e^{At}e^{-At}$$

なので, e^{At} の逆行列は e^{-At} である.

4. は, 式 (3.2) の右辺の項別微分が絶対収束することから,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}e^{At} &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k k t^{k-1} = A \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k-1)!} A^{k-1} t^{k-1} \\ &= A \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k t^k = A e^{At} \end{aligned}$$

が成立する. □

これらのことから, $\mathbf{x}(t) = e^{At}\mathbf{x}_0$ を微分すると,

$$\frac{d}{dt}\mathbf{x}(t) = \frac{d}{dt}e^{At}\mathbf{x}_0 = Ae^{At}\mathbf{x}_0 = A\mathbf{x}(t)$$

であり, 初期値は,

$$\mathbf{x}(0) = e^{A0}\mathbf{x}_0 = I\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_0$$

となるので, 微分方程式 (3.1) の解である. これ以外の解が存在しないことは, 次小節の定理 3.6 (解の一意性) からわかる.

定義 3.3. 行列 $B(t)$ の各成分のラプラス変換を取った行列を作成することを行列のラプラス変換とよび, $\mathcal{L}[B(t)](s)$ と記す. また, 行列の各成分の逆ラプラス変換を取った行列を作成することを逆ラプラス変換とよぶ.

t^k をラプラス変換すると, $\frac{k!}{s^{k+1}}$ であるから, e^{At} の定義式 (3.2) の右辺のラプラス変換は,

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k \frac{k!}{s^{k+1}} = \sum_{k=0}^{\infty} A^k \frac{1}{s^{k+1}}$$

である. A^k の各成分の絶対値は, $n\|A\|^\infty$ の k 乗で押さえられるので, s が十分大きいと公比が 1 より小さい等比級数の和で押さえられているので, ラプラス変換の各成分は絶対収束する.

定義 3.4. 十分大きな s に対して, e^{At} のラプラス変換を

$$\mathcal{L}[e^{At}](s) = \sum_{k=0}^{\infty} A^k \frac{1}{s^{k+1}} = \frac{1}{s}I + \frac{1}{s^2}A + \frac{1}{s^3}A^2 + \dots \quad (3.3)$$

で定義する.

命題 3.5. 次の等式が成立する.

$$\mathcal{L}[e^{At}](s) = (sI - A)^{-1} \quad (3.4)$$

なぜならば,

$$(sI - A) \mathcal{L}[e^{At}](s) = (sI - A) \left(\frac{1}{s}I + \frac{1}{s^2}A + \frac{1}{s^3}A^2 + \dots \right) = I$$

が成立するから □

したがって, 行列の指数関数 e^{At} は, $(sI - A)^{-1}$ を逆ラプラス変換すること (各成分を逆ラプラス変換した行列を作成する) により計算できる.

3.2 状態方程式の解法

状態方程式 (1.1) の解が,

$$\mathbf{x}(t) = e^{At}\mathbf{v}(t)$$

の形であると仮定して, これを状態方程式に代入すると,

$$\mathbf{x}'(t) = Ae^{At}\mathbf{v}(t) + e^{At}\mathbf{v}'(t) = Ae^{At}\mathbf{v}(t) + B\mathbf{u}(t)$$

が成立する. これより,

$$\mathbf{v}'(t) = e^{-At}B\mathbf{u}(t)$$

をえる. 上式の右辺は, 既知の t 変数の関数 $e^{-At}B\mathbf{u}(t)$ なので, t で積分できる. 初期値

$$\mathbf{x}(0) = e^{A0}\mathbf{v}(0) = \mathbf{v}(0) = \mathbf{x}_0$$

を考慮に入れると,

$$\mathbf{v}(t) = \int_0^t e^{-A\tau} B\mathbf{u}(\tau) d\tau + \mathbf{x}_0$$

である。したがって、状態方程式の解は、

$$\mathbf{x}(t) = e^{At} \mathbf{v}(t) = e^{At} \int_0^t e^{-A\tau} B \mathbf{u}(\tau) d\tau + e^{At} \mathbf{x}_0 \quad (3.5)$$

である。

定理 3.6 (状態方程式の解の一意性). 初期値 $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$ を満たす状態方程式 (1.1) の解は一意である。

定理の証明には、次の補題を使う。

補題 3.7. $0 < \rho < 1$ なる正数を固定する。 $\delta > 0$ を $\delta \|A\| \leq \rho$ となるように取る。このとき、時刻 $t \in [t_0, t_0 + \delta]$ において、初期値 $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_{t_0}$ を満たす状態方程式 (1.1) の解は一意である。

時刻 $t \in [t_0, t_0 + \delta]$ における状態方程式の解を $\mathbf{x}_1(t), \mathbf{x}_2(t)$ とすると、

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_1'(t) &= A \mathbf{x}_1(t) + B \mathbf{u}(t), & \mathbf{x}_1(t_0) &= \mathbf{x}_{t_0} \\ \mathbf{x}_2'(t) &= A \mathbf{x}_2(t) + B \mathbf{u}(t), & \mathbf{x}_2(t_0) &= \mathbf{x}_{t_0} \end{aligned}$$

である。両辺を $[t_0, t]$ で定積分して初期値を考慮すると、

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_1(t) &= \mathbf{x}_{t_0} + \int_{t_0}^t A \mathbf{x}_1(\tau) d\tau + \int_{t_0}^t B \mathbf{u}(\tau) d\tau \\ \mathbf{x}_2(t) &= \mathbf{x}_{t_0} + \int_{t_0}^t A \mathbf{x}_2(\tau) d\tau + \int_{t_0}^t B \mathbf{u}(\tau) d\tau \end{aligned}$$

である。引き算して、積分と行列の線形性から

$$\mathbf{x}_1(t) - \mathbf{x}_2(t) = \int_{t_0}^t A (\mathbf{x}_1(\tau) - \mathbf{x}_2(\tau)) d\tau$$

両辺のノルムを取ると

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x}_1(t) - \mathbf{x}_2(t)\| &= \left\| \int_{t_0}^t A (\mathbf{x}_1(\tau) - \mathbf{x}_2(\tau)) d\tau \right\| \\ &\leq \int_{t_0}^t \|A (\mathbf{x}_1(\tau) - \mathbf{x}_2(\tau))\| d\tau \\ &\leq \|A\| \int_{t_0}^t \|\mathbf{x}_1(\tau) - \mathbf{x}_2(\tau)\| d\tau \\ &\leq \|A\| (t - t_0) \sup_{\tau \in [t_0, t]} \|\mathbf{x}_1(\tau) - \mathbf{x}_2(\tau)\| \\ &\leq \|A\| \delta \sup_{\tau \in [t_0, \delta + t_0]} \|\mathbf{x}_1(\tau) - \mathbf{x}_2(\tau)\| \\ &\leq \rho \sup_{\tau \in [t_0, \delta + t_0]} \|\mathbf{x}_1(\tau) - \mathbf{x}_2(\tau)\| \end{aligned}$$

が、任意の時刻 $t \in [t_0, t_0 + \delta]$ で成立する。したがって、左辺 $\|\mathbf{x}_1(t) - \mathbf{x}_2(t)\|$ に対して $t \in [t_0, t_0 + \delta]$ での上限を取っても、この不等式は成立する。よって、

$$\sup_{\tau \in [t_0, \delta + t_0]} \|\mathbf{x}_1(\tau) - \mathbf{x}_2(\tau)\| \leq \rho \sup_{\tau \in [t_0, \delta + t_0]} \|\mathbf{x}_1(\tau) - \mathbf{x}_2(\tau)\|$$

が成り立つ。 $0 < \rho < 1$ かつノルムの非負性により、

$$\sup_{\tau \in [t_0, \delta + t_0]} \|\mathbf{x}_1(\tau) - \mathbf{x}_2(\tau)\| = 0$$

となり、解の一意性が成立する。 \square

定理 3.6 の証明は、補題 3.7 より、 $[0, \delta]$ では、解は一意であり、 $\mathbf{x}(\delta)$ を初期値にして $[\delta, 2\delta]$ でも解は一意である。というふうに、区間を伸ばしていけば、 $[0, \infty)$ で解が一意であることがわかる。

補題 3.7 は、時刻 $t \in [t_0 - \delta, t_0]$ の場合にも

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x}_1(t) - \mathbf{x}_2(t)\| &= \left\| \int_{t_0}^t A (\mathbf{x}_1(\tau) - \mathbf{x}_2(\tau)) d\tau \right\| \\ &\leq \int_t^{t_0} \|A (\mathbf{x}_1(\tau) - \mathbf{x}_2(\tau))\| d\tau \\ &\leq \|A\| \int_t^{t_0} \|\mathbf{x}_1(\tau) - \mathbf{x}_2(\tau)\| d\tau \\ &\leq \|A\| (t_0 - t) \sup_{\tau \in [t, t_0]} \|\mathbf{x}_1(\tau) - \mathbf{x}_2(\tau)\| \\ &\leq \|A\| \delta \sup_{\tau \in [t_0 - \delta, t_0]} \|\mathbf{x}_1(\tau) - \mathbf{x}_2(\tau)\| \\ &\leq \rho \sup_{\tau \in [t_0 - \delta, t_0]} \|\mathbf{x}_1(\tau) - \mathbf{x}_2(\tau)\| \end{aligned}$$

と同じ評価ができるので、区間 $[t_0 - \delta, t_0]$ でも解は一意的である。このことから、 $[-\delta, 0]$ で解は一意的であり、区間を負の方向に伸ばしていけば $(-\infty, 0]$ での一意性もいえる。よって定理 3.6 が成立する。□

3.3 ラプラス変換を用いた状態方程式の解法

2×2 行列 A だと行列式と逆行列が簡単に求まる。

命題 3.8. 2×2 行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ の行列式は、 $|A| = ad - bc$ である。また、 $|A| \neq 0$ の時逆行列は、

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

で与えられる。

行列式は、1 列目で展開して、

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = a|d| - c|b| = ad - bc.$$

逆行列は、余因子使って、

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} |d| & -|c| \\ -|b| & |a| \end{pmatrix}^T = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

ただし、ここでの $|a|$ は、 1×1 行列 (a) の行列式 a を表す。□

状態方程式

$$\mathbf{x}'(t) = \frac{d}{dt} \mathbf{x}(t) = A\mathbf{x}(t) + B\mathbf{u}(t)$$

の両辺のラプラス変換を考えよう。行列を $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ik})$ とすると、状態方程式の第 i 行は、

$$x'_i(t) = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j(t) + \sum_{k=1}^m b_{ik} u_k(t)$$

なので、両辺をラプラス変換すると、

$$sX_i(s) - x_i(0) = \sum_{j=1}^n a_{ij} X_j(s) + \sum_{k=1}^m b_{ik} U_k(s)$$

である。行列形式に書き換えると、

$$s\mathbf{X}(s) - \mathbf{x}(0) = A\mathbf{X}(s) + B\mathbf{U}(s) \quad (3.6)$$

が成立する。同様に出力方程式のラプラス変換も

$$\mathbf{Y}(s) = C\mathbf{X}(s) + D\mathbf{U}(s)$$

である。ただし、

$$\mathbf{X}(s) = \begin{pmatrix} X_1(s) \\ \vdots \\ X_n(s) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{U}(s) = \begin{pmatrix} U_1(s) \\ \vdots \\ U_m(s) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Y}(s) = \begin{pmatrix} Y_1(s) \\ \vdots \\ Y_p(s) \end{pmatrix}.$$

状態方程式のラプラス変換式 (3.6) を解く。

$$(sI - A)\mathbf{X}(s) = \mathbf{x}(0) + B\mathbf{U}(s),$$

$$\mathbf{X}(s) = (sI - A)^{-1} [\mathbf{x}(0) + B\mathbf{U}(s)],$$

$$\mathbf{Y}(s) = C(sI - A)^{-1} \mathbf{x}(0) + [C(sI - A)^{-1} B + D] \mathbf{U}(s).$$

$\mathbf{X}(s)$ を逆ラプラス変換すれば、状態変数 $\mathbf{x}(t)$ が求まる。初期値 $\mathbf{x}(0) = \mathbf{0}$ としたときの入力 $\mathbf{U}(s)$ と出力 $\mathbf{Y}(s)$ の関係が伝達関数行列 $G(s)$ である。

$$\mathbf{Y}(s) = G(s)\mathbf{U}(s) = [C(sI - A)^{-1} B + D] \mathbf{U}(s).$$

3.4 例 1.3 の解法

例 1.3 のバネ・ダンパー系では、状態方程式 (1.5) は、

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -K/m & -C/m \end{pmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1/m \end{pmatrix} u(t) = A\mathbf{x}(t) + B\mathbf{u}(t)$$

なので、

$$sI - A = \begin{pmatrix} s & -1 \\ K/m & s + C/m \end{pmatrix}$$

である。行列式は

$$|sI - A| = s(s + C/m) + K/m = s^2 + C/m s + K/m$$

となり、これは、バネ・ダンパー系の 2 回線形常微分方程式 (1.4) の特性方程式に他ならない。行列式が 0 でないと仮定して、逆行列を求めると

$$(sI - A)^{-1} = \frac{1}{s^2 + C/m s + K/m} \begin{pmatrix} s + C/m & 1 \\ -K/m & s \end{pmatrix}$$

である。逆行列の各成分を逆ラプラス変換すると e^{At} がえられる。

$$\mathbf{X}(s) = (sI - A)^{-1} [\mathbf{x}(0) + B\mathbf{u}(s)]$$

を逆ラプラス変換すれば、内部状態 $\mathbf{x}(t)$ が求まる。出力方程式 (1.6) から、 $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix}$ なので、

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}(s) &= C\mathbf{X}(s) + D\mathbf{u}(s) \\ &= C(sI - A)^{-1}\mathbf{x}(0) + (C(sI - A)^{-1}B + D)\mathbf{u}(s) \\ &= \frac{(s + C/m)x_1(0) + x_2(0)}{|sI - A|} + \frac{U(s)}{|sI - A|} \end{aligned}$$

を逆ラプラス変換すれば、出力 $y(t) = x_1(t)$ が求まる。また、 $\mathbf{x}(0) = \mathbf{0}$ とおけば、

$$Y(s) = \frac{U(s)}{|sI - A|} = G(s)U(s)$$

なので、伝達関数は $G(s) = 1/|sI - A|$ である。

4 可制御性

定義 4.1. システムの状態方程式 (1.1) において、任意の初期状態 \mathbf{x}_0 から任意の最終状態 \mathbf{x}_f へ有限時間で移すことのできる有界な入力 $\mathbf{u}(t)$ が存在するとき、このシステム (A, B) を可制御とよぶ。

定理 4.2. 以下の命題は同値である。

(1) システム (A, B) が可制御である。

(2) 任意の $t > 0$ に対して、 $n \times n$ 行列

$$W_c(t) = \int_0^t (e^{-A\tau} B)(e^{-A\tau} B)^T d\tau = \int_0^t e^{-A\tau} B B^T e^{-A^T \tau} d\tau \quad (4.1)$$

が正則である。(正定値である。)

(3) 次の $n \times nm$ 可制御行列

$$E = \begin{bmatrix} B & AB & \dots & A^{n-1}B \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

の rank が n である。

(4) $n \times (n + m)$ 行列 $\begin{bmatrix} A - \lambda I & B \end{bmatrix}$ が任意の $\lambda \in \mathbb{C}$ に対して rank n である。

(5) $n \times (n + m)$ 行列 $\begin{bmatrix} A - \lambda I & B \end{bmatrix}$ が A の任意の固有値 $\lambda \in \sigma_A$ に対して rank n である。

証明は一応つけるけど、理解する必要なし。

(2) \Rightarrow (1) を示す。 $W_c(t_f)$ が正則なので、任意の最終状態 \mathbf{x}_f と $t_f > 0$ に対して、入力を

$$\mathbf{u}(t) = -(e^{-At} B)^T W_c(t_f)^{-1} (\mathbf{x}_0 - e^{-At_f} \mathbf{x}_f)$$

と取る。すると状態方程式の解 (3.5) より、

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}(t_f) &= e^{At_f} \int_0^{t_f} e^{-A\tau} B \mathbf{u}(\tau) d\tau + e^{At_f} \mathbf{x}_0 \\
&= e^{At_f} \int_0^{t_f} e^{-A\tau} B \left[-(e^{-A\tau} B)^T W_c(t_f)^{-1} (\mathbf{x}_0 - e^{-At_f} \mathbf{x}_f) \right] d\tau + e^{At_f} \mathbf{x}_0 \\
&= e^{At_f} \mathbf{x}_0 - e^{At_f} \int_0^{t_f} e^{-A\tau} B B^T e^{-A^T \tau} d\tau W_c(t_f)^{-1} [\mathbf{x}_0 - e^{-At_f} \mathbf{x}_f] \\
&= e^{At_f} \mathbf{x}_0 - e^{At_f} W_c(t_f) W_c(t_f)^{-1} [\mathbf{x}_0 - e^{-At_f} \mathbf{x}_f] \\
&= \mathbf{x}_f
\end{aligned}$$

であるから、 (A, B) は可制御である。

(1) \Rightarrow (2) を背理法で示す。すなわち、(2) が成り立たないとき (1) が成立すると仮定すると矛盾することを導く。ある時刻 t で $W_c(t)$ が正則でないならば、ある非ゼロベクトル \mathbf{v} が存在して、 $W_c(t)\mathbf{v} = \mathbf{0}$ である。したがって、

$$0 = \mathbf{v}^T W_c(t) \mathbf{v} = \int_0^t \mathbf{v}^T e^{-A\tau} B B^T e^{-A^T \tau} \mathbf{v} d\tau = \int_0^t \|\mathbf{v}^T e^{-A\tau} B\|^2 d\tau$$

ただし、 $\|\mathbf{x}\|$ は、 \mathbf{x} の長さである。よって、 $0 \leq \tau \leq t$ を満たす任意の τ で

$$\mathbf{v}^T e^{-A\tau} B \equiv \mathbf{0}$$

が成り立つ。一方、可制御性から、入力 $\mathbf{u}(\tau)$ が存在して、時刻 t で、内部状態を \mathbf{v} から $\mathbf{0}$ に移すことができるので、

$$\mathbf{0} = e^{At} \int_0^t e^{-A\tau} B \mathbf{u}(\tau) d\tau + e^{At} \mathbf{v}$$

これから、

$$\mathbf{v} = - \int_0^t e^{-A\tau} B \mathbf{u}(\tau) d\tau$$

となる。したがって、

$$\|\mathbf{v}\|^2 = \mathbf{v}^T \mathbf{v} = - \int_0^t (\mathbf{v}^T e^{-A\tau} B) \mathbf{u}(\tau) d\tau = - \int_0^t \mathbf{0}^T \mathbf{u}(\tau) d\tau = 0$$

がえられる。これは、 \mathbf{v} が非ゼロであることに矛盾する。

(3) \Rightarrow (2) を背理法で示す。すなわち、命題 (2) が成り立たないとき、命題 (3) が成り立つと仮定すると矛盾を導く。条件 (2) が成り立たないので、ある非ゼロベクトル \mathbf{v} が存在して、 $0 \leq \tau \leq t$ を満たす任意の τ で

$$\mathbf{s}(\tau) = \mathbf{v}^T e^{-A\tau} B \equiv \mathbf{0}$$

が成り立つ。関数 $\mathbf{s}(\tau)$ は、定数関数なので、 $\tau = 0$ で何回でも微分できて導関数は $\mathbf{0}$ である。したがって、

$$\begin{aligned}
\mathbf{s}(0) &= \mathbf{v}^T B = \mathbf{0} \\
\mathbf{s}'(0) &= \mathbf{v}^T (-A) B = \mathbf{0} \\
\mathbf{s}''(0) &= \mathbf{v}^T (-A)^2 B = \mathbf{0} \\
\mathbf{s}^{(n-1)}(0) &= \mathbf{v}^T (-A)^{n-1} B = \mathbf{0}
\end{aligned}$$

である。まとめて書くと

$$\mathbf{v}^T \begin{bmatrix} B & AB & A^2 B & \dots & A^{n-1} B \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

をえる。 n 次縦ベクトル $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ なので、 $\begin{bmatrix} B & AB & A^2 B & \dots & A^{n-1} B \end{bmatrix}$ の rank は n より小である。したがって、命題 (3) に矛盾する。

(2) \Rightarrow (3) も背理法で証明する。命題 (3) が成立しないならば、ある非ゼロベクトル \mathbf{v} が取れて、

$$\mathbf{v}^T \begin{bmatrix} B & AB & A^2 B & \dots & A^{n-1} B \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

が成立する。 A は n 次正方行列なので、ケーリー・ハミルトンの定理から非負整数 k に対して、 A^k は、 $I, A, A^2, \dots, A^{n-1}$ の線形和で記述できる。したがって、

$$\mathbf{v}^T A^k B = \mathbf{v}^T \left(\sum_{\ell=0}^{n-1} h_\ell A^\ell \right) B = \sum_{\ell=0}^{n-1} h_\ell \mathbf{v}^T A^\ell B = \mathbf{0}$$

である。これを使うと、

$$\mathbf{v}^T e^{-At} B = \mathbf{v}^T \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{1}{\ell!} A^\ell t^\ell B = \mathbf{0}$$

である。

$$\mathbf{v}^T W_c(t) \mathbf{v} = \int_0^t (\mathbf{v}^T e^{-A\tau} B) (\mathbf{v}^T e^{-A\tau} B)^T d\tau = 0$$

となり、 $W_c(t)$ が正定値行列であることに矛盾する。

(3) \Rightarrow (4) も背理法で行う。命題 (4) が成立していないとする。つまり、ある λ と $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ に対して、

$$\mathbf{v}^T [A - \lambda I] = \mathbf{0}, \quad \mathbf{v}^T B = \mathbf{0}$$

が成立する。

$$\mathbf{v}^T A = \lambda \mathbf{v}^T, \quad \mathbf{v}^T B = \mathbf{0}.$$

繰り返し使うと、任意の非負整数 l に対して、

$$\mathbf{v}^T A^l B = \lambda^l \mathbf{v}^T B = \mathbf{0}$$

が成立する。したがって、

$$\mathbf{v}^T \begin{bmatrix} B & AB & A^2B & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

となり、命題 (3) と矛盾する。

(4) \Rightarrow (3) の証明には、次の補題 4.3 を用いる。

補題 4.3. 可制御行列 $E = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix}$ の階数を k ($k < n$) とする。このとき次式を満たす正則行列 $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ が存在する。

$$A = Q \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & A_3 \end{bmatrix} Q^{-1}, \quad B = Q \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

ただし、 $A_1 \in \mathbb{R}^{k \times k}$, $A_2 \in \mathbb{R}^{k \times (n-k)}$, $A_3 \in \mathbb{R}^{(n-k) \times (n-k)}$, $B_1 \in \mathbb{R}^{k \times m}$ である。さらに、 (A_1, B_1) に関する可制御行列 $E_1 = \begin{bmatrix} B_1 & A_1 B_1 & \cdots & A_1^{k-1} B_1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{k \times km}$ の階数が k になる。

補題 4.3 の証明 可制御行列 E の階数が k なので、 E から線形独立な縦ベクトルを k 個選ぶ。それを $\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_k$ とし、 $\text{Im } E = \text{span}\{\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_k\}$ とおく。最初に $A \text{Im } E \subset \text{Im } E$ を示す。 A が n 次正方行列なので、ケーリー・ハミル

トンの定理から、 $A^n = \alpha_0 I + \alpha_1 A + \cdots + \alpha_{n-1} A^{n-1}$ と書き表すことができるので、 $A^n B$ の各縦ベクトルは、 E の縦ベクトルの線形和で書き表せる。

$$AE = \begin{bmatrix} AB & A^2B & \cdots & A^n B \end{bmatrix}$$

より、 $\text{span}\{AE\} \subset \text{span}\{E\}$ が成立する。したがって、 $A \text{Im } E \subset \text{Im } E$ 。

$1 \leq \ell \leq k$ に対して、 $A \mathbf{q}_\ell \in \text{Im } E$ なので、係数列 $p_{m,\ell}$ が取れて、

$$A \mathbf{q}_\ell = p_{1,\ell} \mathbf{q}_1 + \cdots + p_{k,\ell} \mathbf{q}_k = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_1 & \cdots & \mathbf{q}_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{1,\ell} \\ \vdots \\ p_{k,\ell} \end{bmatrix}$$

と記述できる。ベクトル \mathbf{q}_ℓ をひとまとめにすると、

$$A \begin{bmatrix} \mathbf{q}_1 & \cdots & \mathbf{q}_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_1 & \cdots & \mathbf{q}_k \end{bmatrix} \begin{pmatrix} p_{1,1} & \cdots & p_{1,k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{k,1} & \cdots & p_{k,k} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_1 & \cdots & \mathbf{q}_k \end{bmatrix} A_1$$

が成り立つ。ベクトル $\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_k$ は、線形独立な n 次縦ベクトルなので、さらにこれらと線形独立な $(n-k)$ 組の n 次縦ベクトル $\mathbf{q}_{k+1}, \dots, \mathbf{q}_n$ が取れる。

$k < \ell \leq n$ に対して、 $A \mathbf{q}_\ell \in \mathbb{R}^n$ なので、 \mathbb{R}^n の基底 $\{\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_n\}$ で展開できる。

$$A \mathbf{q}_\ell = p_{1,\ell} \mathbf{q}_1 + \cdots + p_{n,\ell} \mathbf{q}_n = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_1 & \cdots & \mathbf{q}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{1,\ell} \\ \vdots \\ p_{n,\ell} \end{bmatrix}$$

全部まとめると

$$A \begin{bmatrix} \mathbf{q}_1 & \cdots & \mathbf{q}_k & \mathbf{q}_{k+1} & \cdots & \mathbf{q}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_1 & \cdots & \mathbf{q}_k & \mathbf{q}_{k+1} & \cdots & \mathbf{q}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & A_3 \end{bmatrix}$$

とかける。ここで、 $A_1 \in \mathbb{R}^{k \times k}$, $A_2 \in \mathbb{R}^{k \times (n-k)}$, $A_3 \in \mathbb{R}^{(n-k) \times (n-k)}$ である。また、 $Q = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_1 & \cdots & \mathbf{q}_k & \mathbf{q}_{k+1} & \cdots & \mathbf{q}_n \end{bmatrix}$ は、 n 次正方正則行列であり、

$$AQ = Q \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & A_3 \end{bmatrix} \implies A = Q \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & A_3 \end{bmatrix} Q^{-1}$$

を満たす.

次に, 行列 B は, 可制御行列 E の一部なので, 行列 B の各列 $\mathbf{b}_\ell, 1 \leq \ell \leq m$ は, ベクトル $\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_k$ の線形結合でかける. つまり,

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_\ell &= r_{1,\ell}\mathbf{q}_1 + \dots + r_{k,\ell}\mathbf{q}_k = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_1 & \dots & \mathbf{q}_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_{1,\ell} \\ \vdots \\ r_{k,\ell} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{q}_1 & \dots & \mathbf{q}_k & \mathbf{q}_{k+1} & \dots & \mathbf{q}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_{1,\ell} \\ \vdots \\ r_{k,\ell} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

列べて記述すると,

$$\begin{aligned} B &= \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1 & \dots & \mathbf{b}_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_1 & \dots & \mathbf{q}_k & \mathbf{q}_{k+1} & \dots & \mathbf{q}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_{1,1} & \dots & r_{1,m} \\ \vdots & \ddots & \dots \\ r_{k,1} & \dots & r_{k,m} \\ 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \\ &= Q \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

が成立する. したがって, $0 \leq \ell \leq n-1$ に対して,

$$A^\ell B = \left(Q \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & A_3 \end{bmatrix} Q^{-1} \right)^\ell Q \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix} = Q \begin{bmatrix} A_1^\ell & F_\ell \\ 0 & A_3^\ell \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix} = Q \begin{bmatrix} A_1^\ell B_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

が成り立つ. ただし, F_ℓ は, A_1, A_2, A_3 を適当に掛け合わせた行列である. したがって, 可制御行列の関係では,

$$E = \begin{bmatrix} B & AB & \dots & A^{n-1}B \end{bmatrix} = Q \begin{bmatrix} B_1 & A_1 B_1 & \dots & A_1^{n-1} B_1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

である. Q が正則なので,

$$\begin{aligned} k = \text{rank } E &= \text{rank} \begin{bmatrix} B_1 & A_1 B_1 & \dots & A_1^{n-1} B_1 \end{bmatrix} \\ &= \text{rank} \begin{bmatrix} B_1 & A_1 B_1 & \dots & A_1^{k-1} B_1 \end{bmatrix} = \text{rank } E_1 \end{aligned}$$

ただし, A_1 が k 次正方行列なので, ケーリー・ハミルトンの定理から $A_1^\ell, \ell \geq k$ が I, A_1, \dots, A_1^{k-1} の線形和でかけることを使うと, 上の式から下の式が導ける. 補題 4.3 の証明終わり \square

定理 4.2 (4) \Rightarrow (3) も背理法を用いて証明する. 可制御行列 E の階数が k ($k < n$) であると仮定すると命題 (4) に矛盾することを示す.

補題 4.3 より, ある正則行列 Q が取れて,

$$A = Q \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & A_3 \end{bmatrix} Q^{-1}, \quad B = Q \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

が成立する. $(n-k) \times (n-k)$ 行列 A_3 の固有値 λ と左固有ベクトル $\mathbf{w}^T \in \mathbb{R}^{1 \times (n-k)}$ を取ると, $\mathbf{w}^T A_3 = \lambda \mathbf{w}^T$ である.

$$\mathbf{v}^T = \mathbf{w}^T \begin{bmatrix} O_{(n-k),k} & I_{n-k} \end{bmatrix} Q^{-1} \neq \mathbf{0}$$

で $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ を定める. ただし, $O_{(n-k),k}$ は $(n-k) \times k$ のゼロ行列, I_{n-k} は $(n-k) \times (n-k)$ の単位行列である. すると,

$$\begin{aligned} \mathbf{v}^T A &= \mathbf{w}^T \begin{bmatrix} O_{(n-k),k} & I_{n-k} \end{bmatrix} Q^{-1} Q \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & A_3 \end{bmatrix} Q^{-1} \\ &= \mathbf{w}^T \begin{bmatrix} O_{(n-k),k} & A_3 \end{bmatrix} Q^{-1} \\ &= \lambda \mathbf{w}^T \begin{bmatrix} O_{(n-k),k} & I_{n-k} \end{bmatrix} Q^{-1} \\ &= \lambda \mathbf{v}^T, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{v}^T B &= \mathbf{w}^T \begin{bmatrix} O_{(n-k),k} & I_{n-k} \end{bmatrix} Q^{-1} Q \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \mathbf{w}^T \begin{bmatrix} O_{(n-k),k} & I_{n-k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix} = \mathbf{0} \end{aligned}$$

が成立し、条件 (4) の $n \times (n+m)$ 行列 $\begin{bmatrix} A - \lambda I & B \end{bmatrix}$ が階数 n (行フルランク) であることに矛盾する。なぜなら、

$$\mathbf{v}^T \begin{bmatrix} A - \lambda I & B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda \mathbf{v}^T - \lambda \mathbf{v}^T & \mathbf{v}^T B \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

である。これより、 $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ は、行列 $\begin{bmatrix} A - \lambda I & B \end{bmatrix}$ の各列ベクトルと直交するから、列ベクトルの集合と一次独立である。したがって、行列 $\begin{bmatrix} A - \lambda I & B \end{bmatrix}$ の階数は、 $(n-1)$ 以下である。

命題 (4) と (5) が同値であることを示す。 λ が A の固有値でないとする、 n 次正方行列 $A - \lambda I$ の階数が n になることから、行列 $\begin{bmatrix} A - \lambda I & B \end{bmatrix}$ の階数は n である。したがって、 A の固有値 λ のみで行列 $\begin{bmatrix} A - \lambda I & B \end{bmatrix}$ の階数を調べれば良い。よって、命題 (4) と (5) は同値である。 \square

5 可観測性

定義 5.1. 状態方程式 (1.1) と出力方程式 (1.2) を持つ m 入力, p 出力, n 次線形システムを考える。任意の時刻 $t_1 > t_0$ に対して、閉区間 $[t_0, t_1]$ の間の入力 $\mathbf{u}(t)$ と出力 $\mathbf{y}(t)$ から、初期状態 $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_{t_0}$ が一意に決定できるとき、このシステム (C, A) を可観測とよぶ。

定理 5.2. 以下の命題は同値である。

- (1) システム (C, A) が可観測である。
- (2) 任意の $t > t_0$ に対して、 $n \times n$ 行列

$$\begin{aligned} W_0(t) &= \int_{t_0}^t (C e^{A(\tau-t_0)})^T (C e^{A(\tau-t_0)}) d\tau \\ &= \int_{t_0}^t e^{A^T(\tau-t_0)} C^T C e^{A(\tau-t_0)} d\tau \end{aligned}$$

が正則である。(正定値である。)

- (3) 次の $pn \times n$ 可観測行列

$$F = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \quad (5.1)$$

の rank が n である。

- (4) $(n+p) \times n$ 行列 $\begin{bmatrix} A - \lambda I \\ C \end{bmatrix}$ が任意の $\lambda \in \mathbb{C}$ に対して rank が n である。
- (5) $(n+p) \times n$ 行列 $\begin{bmatrix} A - \lambda I \\ C \end{bmatrix}$ が A の任意の固有値 $\lambda \in \sigma_A$ に対して rank が n である。
- (6) (A^T, C^T) が可制御である。

定理 5.2 の証明を行う。最初に命題 (3) と命題 (6) が同値であることを示す。式 (5.1) で与えられる可観測行列 F の転置を取ると、

$$\begin{aligned} F^T &= \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} C^T & (CA)^T & \dots & (CA^{n-1})^T \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} C^T & A^T C^T & \dots & (A^T)^{n-1} C^T \end{bmatrix} \end{aligned}$$

である。 F^T を式 (4.2) の可制御行列

$$E = \begin{bmatrix} B & AB & \dots & A^{n-1}B \end{bmatrix}$$

と比較すると、 $B \rightarrow C^T, A \rightarrow A^T$ とおけば、定理 4.2 の命題 (3) が成立する。これより、命題 (3) と命題 (6) は同値である。

定理 4.2 の命題 (3), (4), (5) の同値性より、

$$n = \text{rank} \begin{bmatrix} A^T - \lambda I & C^T \end{bmatrix} = \text{rank} \begin{bmatrix} A^T - \lambda I & C^T \end{bmatrix}^T = \text{rank} \begin{bmatrix} A - \lambda I \\ C \end{bmatrix}$$

が成立する。したがって、定理 5.2 の命題 (3), (4), (5), (6) は同値である。

命題 (2) と (3) の同値性を示そう。まず、任意の $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$ に対して、

$$\mathbf{z}^T W_0(t) \mathbf{z} = \int_{t_0}^t (Ce^{A(\tau-t_0)} \mathbf{z})^T (Ce^{A(\tau-t_0)} \mathbf{z}) d\tau = \int_{t_0}^t \|Ce^{A(\tau-t_0)} \mathbf{z}\|^2 d\tau \geq 0$$

なので、 $W_0(t)$ は非負定値 (半正定値) 行列である。

(2) \Rightarrow (3) は背理法で、 $W_0(t)$ が正定値でないと仮定すると、ある $\mathbf{z} \neq \mathbf{0}$ で

$$\mathbf{z}^T W_0(t) \mathbf{z} = \int_{t_0}^t (Ce^{A(\tau-t_0)} \mathbf{z})^T (Ce^{A(\tau-t_0)} \mathbf{z}) d\tau = \int_{t_0}^t \|Ce^{A(\tau-t_0)} \mathbf{z}\|^2 d\tau = 0$$

となる \mathbf{z} が取れる。つまり、

$$Ce^{A(\tau-t_0)} \mathbf{z} \equiv \mathbf{0}, \quad \forall \tau \in [t_0, t]$$

である。 τ で両辺を $(n-1)$ 階まで微分すると、

$$Ce^{A(\tau-t_0)} \mathbf{z} \equiv \mathbf{0}, \quad CAe^{A(\tau-t_0)} \mathbf{z} \equiv \mathbf{0}, \dots, \quad CA^{n-1}e^{A(\tau-t_0)} \mathbf{z} \equiv \mathbf{0}$$

である。ひとまとめにすると、

$$\begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} e^{A(\tau-t_0)} \mathbf{z} = \mathbf{0} \quad (5.2)$$

ここで、 $e^{A(\tau-t_0)}$ は正則行列かつ $\mathbf{z} \neq \mathbf{0}$ であるから、 $e^{A(\tau-t_0)} \mathbf{z} \neq \mathbf{0}$ より、

$$\text{rank} \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} = \text{rank } F \leq n-1$$

なので、命題 (3) に矛盾する。したがって、(2) \Rightarrow (3) が示された。

(3) \Rightarrow (2) も背理法で示す。命題 (3) が成り立たないとすると、ある $\mathbf{z} \neq \mathbf{0}$ で、

$$F\mathbf{z} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \mathbf{z} = \mathbf{0}$$

となるベクトルが取れる。 A が n 次正方行列なので、ケーリー・ハミルトンの定理より、任意の非負整数 k に対して、 A^k は、 $I, A, A^2, \dots, A^{n-1}$ の線形和でかける。よって、

$$A^k = \sum_{\ell=0}^{n-1} h_\ell A^\ell \implies CA^k \mathbf{z} = \sum_{\ell=0}^{n-1} h_\ell CA^\ell \mathbf{z} = \mathbf{0}$$

が成立する。任意の $\tau \in \mathbb{R}$ に対して、

$$Ce^{A(\tau-t_0)} \mathbf{z} = C \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (\tau-t_0)^k A^k \mathbf{z} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (\tau-t_0)^k CA^k \mathbf{z} = \mathbf{0}$$

である。したがって、

$$\mathbf{z}^T W_0(t) \mathbf{z} = \int_{t_0}^t (Ce^{A(\tau-t_0)} \mathbf{z})^T (Ce^{A(\tau-t_0)} \mathbf{z}) d\tau = \int_{t_0}^t \|Ce^{A(\tau-t_0)} \mathbf{z}\|^2 d\tau = 0$$

なので、 $W_0(t)$ は正定値行列ではない。よって、命題 (2) に矛盾する。

最後に、命題 (1) と (2) の同値性を示す。まず、入力 $\mathbf{u}(t)$ 、初期内部状態 $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_{t_0}$ から始めた状態方程式 (1.1) の解は、式 (3.5) を参考にして、

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= e^{At} \mathbf{v}(t) = e^{A(t-t_0)} \int_{t_0}^t e^{-A(\tau-t_0)} B\mathbf{u}(\tau) d\tau + e^{A(t-t_0)} \mathbf{x}_{t_0} \\ &= \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)} B\mathbf{u}(\tau) d\tau + e^{A(t-t_0)} \mathbf{x}_{t_0} \end{aligned} \quad (5.3)$$

である。出力方程式 (1.2) に式 (5.3) を代入すると、

$$\mathbf{y}(t) = C\mathbf{x}(t) + D\mathbf{u}(t) = C \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)} B\mathbf{u}(\tau) d\tau + Ce^{A(t-t_0)} \mathbf{x}_{t_0} + D\mathbf{u}(t)$$

である。よって、

$$Ce^{A(t-t_0)} \mathbf{x}_{t_0} = \mathbf{y}(t) - C \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)} B\mathbf{u}(\tau) d\tau - D\mathbf{u}(t) = \mathbf{w}(t) \quad (5.4)$$

ここで、 $t \in [t_0, t_1]$ において、 $\mathbf{y}(t)$ と $\mathbf{u}(t)$ は既知関数なので、式 (5.4) 右辺の $\mathbf{w}(t)$ も既知である。式 (5.4) に左から $(Ce^{A(t-t_0)})^T$ をかけて、 t_0 から t まで積分すれば、

$$\int_{t_0}^t (Ce^{A(\tau-t_0)})^T Ce^{A(\tau-t_0)} d\tau \mathbf{x}_{t_0} = W_0(t) \mathbf{x}_{t_0} = \int_{t_0}^t (Ce^{A(\tau-t_0)})^T \mathbf{w}(\tau) d\tau$$

である.

(2) \Rightarrow (1) は, $W_0(t)$ が正定値 (正則) なので

$$\mathbf{x}_{t_0} = W_0(t)^{-1} \int_{t_0}^t (C e^{A(\tau-t_0)})^T \mathbf{w}(\tau) d\tau$$

により, $\mathbf{w}(t)$ から初期状態 \mathbf{x}_{t_0} が一意に定まる.

(1) \Rightarrow (2) は, 命題 (2) と同値な命題 (3) を使った対偶 $\neg(3) \Rightarrow \neg(1)$ を証明する. 命題 (3) が成立しない場合には, ある $\mathbf{z} \neq \mathbf{0}$ で,

$$F\mathbf{z} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \mathbf{z} = \mathbf{0}$$

が取れて, 任意の $\tau \in \mathbb{R}$ に対して,

$$C e^{A(\tau-t_0)} \mathbf{z} = \mathbf{0}$$

となる. (このことは, (3) \Rightarrow (2) の証明中に示した.) この \mathbf{z} を初期状態 \mathbf{x}_{t_0} に選ぶと, 解 (5.3) は,

$$\mathbf{x}(t) = \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)} B \mathbf{u}(\tau) d\tau + e^{A(t-t_0)} \mathbf{z}$$

である. これを出力方程式 (1.2) に代入すると,

$$\mathbf{y}(t) = C \mathbf{x}(t) + D \mathbf{u}(t)$$

$$\mathbf{y}(t) = C \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)} B \mathbf{u}(\tau) d\tau + C e^{A(t-t_0)} \mathbf{z} + D \mathbf{u}(t)$$

$$\mathbf{y}(t) = C \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)} B \mathbf{u}(\tau) d\tau + D \mathbf{u}(t)$$

となって, 一番下の式では, 初期状態 $\mathbf{x}_{t_0} = \mathbf{z}$ が現れないので, 既知出力 $\mathbf{y}(t)$ と既知入力 $\mathbf{u}(t)$ から, 初期状態を定めることはできない. よって命題 (1) が成立しない. こうして, 定理 5.2 が証明できた. \square

6 可制御・可観測の計算

例 1.3 のバネ・ダンパー系は,

$$\begin{aligned} \mathbf{x}'(t) = A\mathbf{x}(t) + B\mathbf{u}(t) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -K/m & -C/m \end{pmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1/m \end{pmatrix} \mathbf{u}(t), \\ y(t) = C\mathbf{x}(t) + D\mathbf{u}(t) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix} \mathbf{u}(t) \end{aligned}$$

だったので, 可制御行列 E は,

$$E = \begin{bmatrix} B & AB \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1/m \\ -k/m & -C/m \end{bmatrix} \Rightarrow \text{rank } E = 2$$

より可制御である. 可観測行列 F は,

$$F = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{rank } F = 2$$

より可観測である.

例 6.1. 1 入力, 1 出力, 2 内部状態の線形システム

$$\begin{aligned} \mathbf{x}'(t) &= A\mathbf{x}(t) + B\mathbf{u}(t) \\ y(t) &= C\mathbf{x}(t) + D\mathbf{u}(t) \end{aligned}$$

において,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix}$$

とする. このときシステムの伝達関数 $G(s)$ を求め. 可制御性と可観測性を調べよ.

ラプラス変換を取って, 初期値 $\mathbf{x}(0) = \mathbf{0}$ とおくと, 伝達関数 $G(s)$ は,

$$s\mathbf{X}(s) - \mathbf{x}(0) = A\mathbf{X}(s) + B\mathbf{U}(s)$$

$$(sI - A)\mathbf{X}(s) = B\mathbf{U}(s), \quad \mathbf{X}(s) = (sI - A)^{-1}B\mathbf{U}(s)$$

$$Y(s) = C(sI - A)^{-1}B\mathbf{U}(s) + D\mathbf{U}(s) = (C(sI - A)^{-1}B + D)\mathbf{U}(s)$$

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D = \begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s-1 & -2 \\ -3 & s-4 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{s+3}{s^2-5s+10}$$

である。可制御行列 E は,

$$E = \begin{bmatrix} B & AB \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{rank } E = 2$$

より可制御である。可観測行列 F は,

$$F = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 8 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{rank } F = 2$$

より可観測である。