# システム科学II　信頼性工学

守本晃　2014 年 12 月 23 日版

## 1　はじめに

信頼性工学 (reliability engineering) を学習する．

時間変数を $\mathbb{R}_+ := \{t \in \mathbb{R} \mid t \geq 0\}$ の範囲で考える．$\mathbb{R}_+$ 上の非負の可積分関数 $f(t)$ で，積分

$$\int_0^\infty f(t)\,dt = 1$$

を満たすものを**故障密度関数**（一般に確率密度関数）と呼ぶ．時刻 $t$ までに壊れる確率

$$P(t) = \int_0^t f(s)\,ds$$

を**故障率**と呼ぶ．故障率 $P(t)$ の微分が故障密度関数であるつまり，$f(t) = P'(t)$．時刻 $t$ まで，故障していない確率（故障率 $P(t)$ の余事象）

$$R(t) = 1 - P(t) = 1 - \int_0^t f(t)\,dt$$

を**信頼度関数**と呼ぶ．

故障密度関数の期待値 (平均値)

$$E[f] = \int_0^\infty t\,f(t)\,dt$$

が計算できるときこの期待値を**平均寿命**と呼ぶ．

平均寿命が計算できるとき，次の定理が成立する．

**定理 1.1.** 平均寿命は，信頼度関数を積分すれば求まる．

$$E[f] = \int_0^\infty R(t)\,dt.$$

時間 $T > 0$ まで生き残った品物の平均寿命を**残り平均寿命**という．図 1 から分かるように，この場合の故障密度関数 $g(t)$ は，

$$g(t) = \alpha f(t+T)$$

である．ただし，定数 $\alpha \geq 1$ は，

$$\int_0^\infty g(t)dt = \alpha \int_0^\infty f(t+T)dt = \alpha \int_T^\infty f(t)dt = 1$$

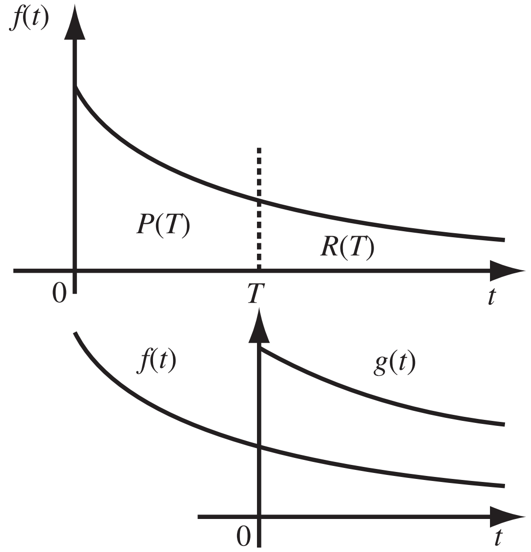


図 1: 時刻 $T$ まで生きた後の故障密度関数 $g(t)$.

を満たすように取る．つまり，新しい故障密度関数 $g(t)$ は，

$$g(t) = \frac{f(t+T)}{\int_0^\infty f(t+T)dt}$$

で与えられ，残り平均寿命は，次式で与えられる．

$$\int_0^\infty tg(t)dt = \text{残り平均寿命}.$$

もし，信頼度関数 $R(t)$ が求まっているなら，新しい故障密度関数 $g(t)$ の分母は，

$$\int_0^\infty f(t+T)\,dt = \int_T^\infty f(t)\,dt = \int_0^\infty f(t)\,dt - \int_0^T f(t)\,dt = 1 - P(T) = R(T).$$

### 1.1　分布関数

有名な故障密度関数（一般に**確率分布関数**と呼ぶ）とその特徴をあげておく．

#### 1.1.1　指数分布

平均寿命と任意の $T$ まで生き残った製品の残り平均寿命が等しくなる分布である．正定数 $\lambda > 0$ に対して，信頼度関数が

$$R(t) = e^{-\lambda t}$$

で与えられる分布を**指数分布**と呼ぶ．故障率 $P(t) = 1 - R(t) = 1 - e^{-\lambda t}$ を微分すると故障密度関数 $f(t)$ がえられるので，

$$f(t) = P'(t) = (1 - R(t))' = -R'(t) = \lambda\, e^{-\lambda t}.$$

定理 1.1 を用いて平均寿命を計算すると，

$$E[f] = \int_0^\infty R(t)dt = \int_0^\infty e^{-\lambda t}dt = \left[\frac{1}{-\lambda}\, e^{-\lambda t}\right]_0^\infty = \frac{1}{\lambda}.$$

時刻 $T$ まで生き残った製品の故障密度関数は，

$$g(t) = \frac{f(t+T)}{\int_0^\infty f(t+T)\, dt} = \frac{f(t+T)}{R(T)} = \frac{\lambda\, e^{-\lambda(t+T)}}{e^{-\lambda T}} = \lambda\, e^{-\lambda t} = f(t)$$

で与えられる．つまり，$g(t) = f(t)$ であるから，残り平均寿命は，平均寿命と等しくなる．

#### 1.1.2　ガンマ分布

ガンマ関数 $\Gamma(x)$ を用いた分布関数である．

**定義 1.2.** $x > 0$ に対して，**ガンマ関数** $\Gamma(x)$ を積分

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-s}\, s^{x-1}\, ds$$

で定義する．

ガンマ関数は非負整数 $n$ の階乗 $n!$ を正の実数へ拡張した関数であり，以下の性質を満たす．

1. $x > 0$ に対して $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ である．
2. $\Gamma(1) = 1$ である．
3. 自然数 $n$ に対して，$\Gamma(n+1) = n!$ である．
4. $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ である．

**定義 1.3.** $C > 0$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$ を定数とするとき，故障密度関数 $f(t)$, $t > 0$ を

$$f(t) = C\, t^{\alpha-1}\, e^{-\beta t}$$

と取った分布を**ガンマ分布**と言う．定数 $C > 0$ は，$C = \dfrac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}$ である．

定数 $C > 0$ は，$\displaystyle\int_0^\infty f(t)\, dt = 1$ を満たすように選ぶ必要がある．つまり，

$$\begin{aligned} 1 &= \int_0^\infty f(t)\, dt = C\int_0^\infty t^{\alpha-1}\, e^{-\beta t}\, dt = C\int_0^\infty \left(\frac{s}{\beta}\right)^{\alpha-1} e^{-s}\, \frac{ds}{\beta} \\ &= \frac{C}{\beta^\alpha}\int_0^\infty s^{\alpha-1}\, e^{-s}\, ds = \frac{C}{\beta^\alpha}\,\Gamma(\alpha) \end{aligned}$$

ただし，$s = \beta t$ と変数変換 ($ds = \beta dt$, 積分範囲は変わらず) した．したがって，$C = \dfrac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}$ である．

パラメータ $\alpha, \beta$ を変更したときのガンマ分布の故障密度関数は，図 2 である．

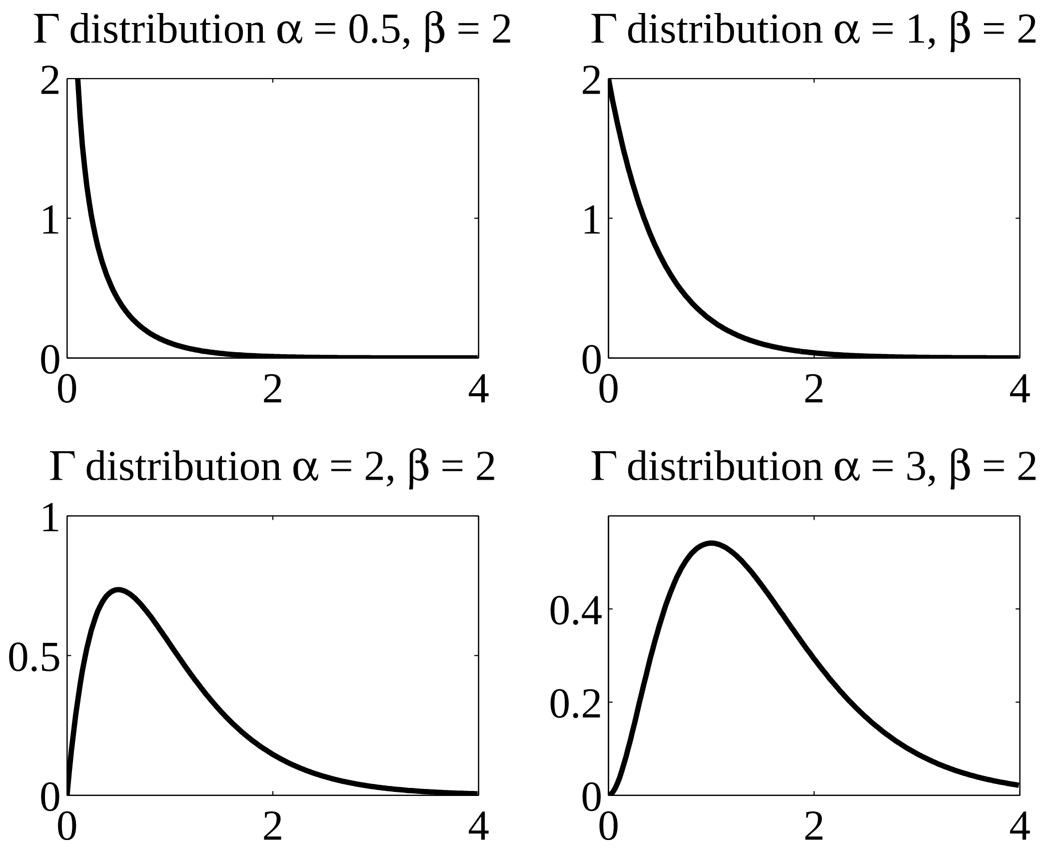


図 2: ガンマ分布の故障密度関数．$\alpha = 0.5, 1, 2, 3$, $\beta = 2$.

ガンマ分布の平均寿命を求めよう.

$$
\begin{aligned}
E[f] &= \int_0^\infty t\, f(t)\, dt = C \int_0^\infty t\, t^{\alpha-1}\, e^{-\beta t}\, dt = C \int_0^\infty t^\alpha\, e^{-\beta t}\, dt \\
&= C \int_0^\infty \left(\frac{s}{\beta}\right)^\alpha e^{-s}\, \frac{ds}{\beta} = C \frac{1}{\beta^{\alpha+1}} \int_0^\infty s^\alpha\, e^{-s}\, ds = C \frac{1}{\beta^{\alpha+1}} \Gamma(\alpha+1) \\
&= \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \frac{1}{\beta^{\alpha+1}} \Gamma(\alpha+1) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \frac{1}{\beta^{\alpha+1}} \alpha\Gamma(\alpha) = \frac{\alpha}{\beta}
\end{aligned}
$$

ただし，$s = \beta t$ と変数変換 ($ds = \beta dt$, 積分範囲は変わらず) した．ガンマ関数の性質 1. より，$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ であることを使った．

#### 1.1.3 ワイブル分布

**定義 1.4.** $c > 0$, $\alpha > 0$ を定数として，時刻 $t > 0$ での故障率 $P(t)$ と信頼度 $R(t)$ が

$$
P(t) = 1 - e^{-ct^\alpha}, R(t) = e^{-ct^\alpha}
$$

で与えられる分布を**ワイブル分布 (Weibull distribution)** とよぶ.

ワイブル分布の故障密度関数 $f(t)$ は.

$$
f(t) = \frac{d}{dt} P(t) = c\alpha t^{\alpha-1}\, e^{-ct^\alpha}
$$

である．

パラメータ $c > 0$, $\alpha > 0$ を変更したときの故障密度関数を図 3 にのせる．

ワイブル分布の平均寿命は,

$$
E[f] = \int_0^\infty t\, f(t)\, dt = \int_0^\infty t\, c\alpha t^{\alpha-1}\, e^{-ct^\alpha}\, dt = \int_0^\infty t\, e^{-ct^\alpha}\, c\alpha t^{\alpha-1}\, dt
$$

ここで，$s = ct^\alpha$ と変数変換すると，$t = (s/c)^{1/\alpha}$ で，積分範囲は $(0, +\infty)$ で変わらず, $ds = c\alpha t^{\alpha-1}\, dt$ である．よって,

$$
\begin{aligned}
E[f] &= \int_0^\infty (s/c)^{1/\alpha}\, e^{-s} ds = \left(\frac{1}{c}\right)^{1/\alpha} \int_0^\infty s^{1/\alpha}\, e^{-s} ds \\
&= \left(\frac{1}{c}\right)^{1/\alpha} \int_0^\infty s^{(1/\alpha+1)-1}\, e^{-s} ds = \left(\frac{1}{c}\right)^{1/\alpha} \Gamma\left(\frac{1}{\alpha} + 1\right)
\end{aligned}
$$

を得る.

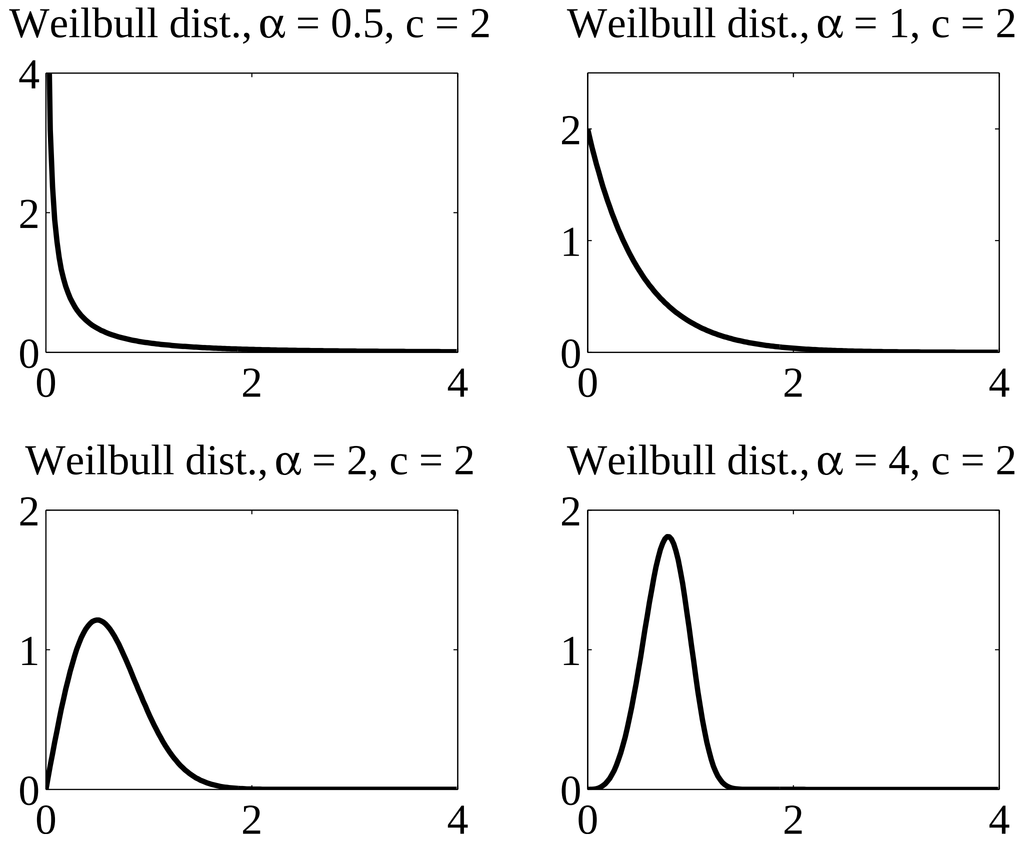


図 3: ワイブル分布の故障密度関数．$\alpha = 0.5, 1, 2, 4$, $c = 2$.

## 2 直列接続と並列接続

信頼度が $R_1(t)$, $R_2(t)$, ..., $R_N(t)$ で与えられる $N$ 個の部品を適当に組み合わせたシステムの信頼度 $R(t)$ を計算しよう．特に直列接続と並列接続が重要である．

### 2.1 直列接続

図 4 は，信頼度 $R_1(t)$ と $R_2(t)$ の部品を直列に繋いだ場合である．各部品の故障率は $P_1(t) = 1 - R_1(t)$, $P_2(t) = 1 - R_2(t)$ である．直列接続の場合は，システム全体が生きているためには，両方の部品が生きている必要がある．したがって，システム全体の信頼度 $R(t)$ は各部品の信頼度の積である．

$$
R(t) = R_1(t) R_2(t).
$$

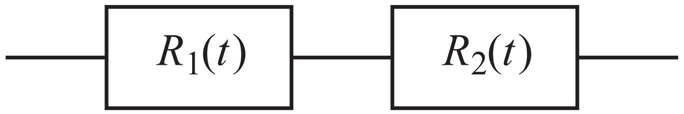


図 4: 直列接続.

このとき，システム全体の故障率 $P(t)$ は，

$$
\begin{aligned}
P(t) &= 1 - R(t) = 1 - R_1(t)R_2(t) = 1 - (1 - P_1(t))(1 - P_2(t)) \\
&= P_1(t) + P_2(t) - P_1(t)P_2(t)
\end{aligned}
$$

である．$P(t)$ を微分すると，システム全体の故障密度関数 $f(t)$ が得られる．ただし，各部品の故障密度関数を $f_1(t) = \frac{d}{dt}P_1(t)$, $f_2(t) = \frac{d}{dt}P_2(t)$ とする．

$$
\begin{aligned}
f(t) &= \frac{d}{dt}P(t) = \frac{d}{dt}(P_1(t) + P_2(t) - P_1(t)P_2(t)) \\
&= \frac{d}{dt}P_1(t) + \frac{d}{dt}P_2(t) - \left(P_2(t)\frac{d}{dt}P_1(t) + P_1(t)\frac{d}{dt}P_2(t)\right) \\
&= f_1(t) + f_2(t) - f_1(t)P_2(t) - f_2(t)P_1(t) = f_1(t)(1 - P_2(t)) + f_2(t)(1 - P_1(t)) \\
&= f_1(t)R_2(t) + f_2(t)R_1(t).
\end{aligned}
$$

直列接続した場合の故障率，信頼度，故障密度関数は，各部品の故障率，信頼度，密度関数が対称に入っている（添え字 1, 2 を取り替えても式は変わらない）ので，直列接続する順序によらない．

## 2.2　並列接続

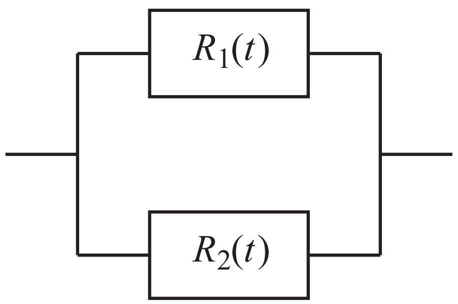


図 5: 並列接続.

図 5 は，信頼度 $R_1(t)$ と $R_2(t)$ の部品を並列に繋いだ場合である．各部品の故障率は $P_1(t) = 1 - R_1(t)$, $P_2(t) = 1 - R_2(t)$ である．並列接続の場合は，両方の部品が同時に壊れていないかぎり，システムは生きている．したがって，システム全体の故障率 $P(t)$ は，各部品の故障率の積で与えられる．

$$P(t) = P_1(t)P_2(t).$$

システム全体の信頼度 $R(t)$ は，

$$
\begin{aligned}
R(t) &= 1 - P(t) = 1 - P_1(t)P_2(t) = 1 - (1 - R_1(t))(1 - R_2(t)) \\
&= R_1(t) + R_2(t) - R_1(t)R_2(t)
\end{aligned}
$$

である．各部品の故障密度関数を $f_1(t) = \frac{d}{dt}P_1(t)$, $f_2(t) = \frac{d}{dt}P_2(t)$ とすると，システム全体の故障密度関数 $f(t)$ は，

$$
\begin{aligned}
f(t) &= \frac{d}{dt}P(t) = \frac{d}{dt}(P_1(t)P_2(t)) = P_2(t)\frac{d}{dt}P_1(t) + P_1(t)\frac{d}{dt}P_2(t) \\
&= f_1(t)P_2(t) + f_2(t)P_1(t)
\end{aligned}
$$

である．

## 2.3　例

図 6 の故障密度関数 $f_1(t)$ と $f_2(t)$ を持つ部品を直列接続と並列接続した場合を考えよう．このときのシステム全体の信頼度，故障率，故障密度関数，平均寿命を求めよ．

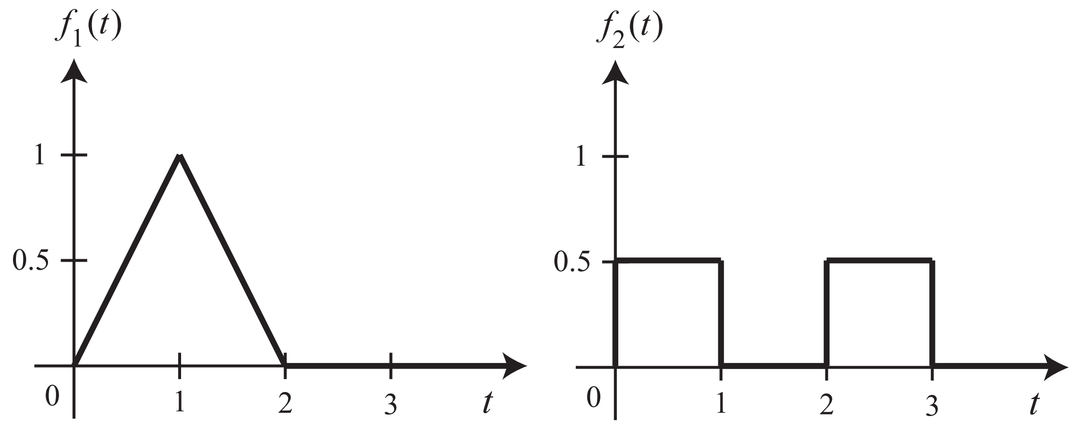


図 6: 例の部品の故障密度関数 $f_1(t)$ と $f_2(t)$.

最初に，部品 1, 2 の故障率 $P_1(t)$, $P_2(t)$ と信頼度 $R_1(t)$, $R_2(t)$ と平均寿命を求めよう．故障率は,

$$P_1(t) = \int_0^t f_1(s)ds = \begin{cases} t^2/2, & 0 \le t \le 1, \\ 1-(t-2)^2/2, & 1 \le t \le 2, \\ 1, & 2 \le t, \end{cases}$$

$$P_2(t) = \int_0^t f_2(s)ds = \begin{cases} t/2, & 0 \le t \le 1, \\ 1/2, & 1 \le t \le 2, \\ t/2-1/2, & 2 \le t \le 3, \\ 1, & 3 \le t \end{cases}$$

なので，図 6 の故障密度関数を積分すると，図 7 を得る．信頼度は,

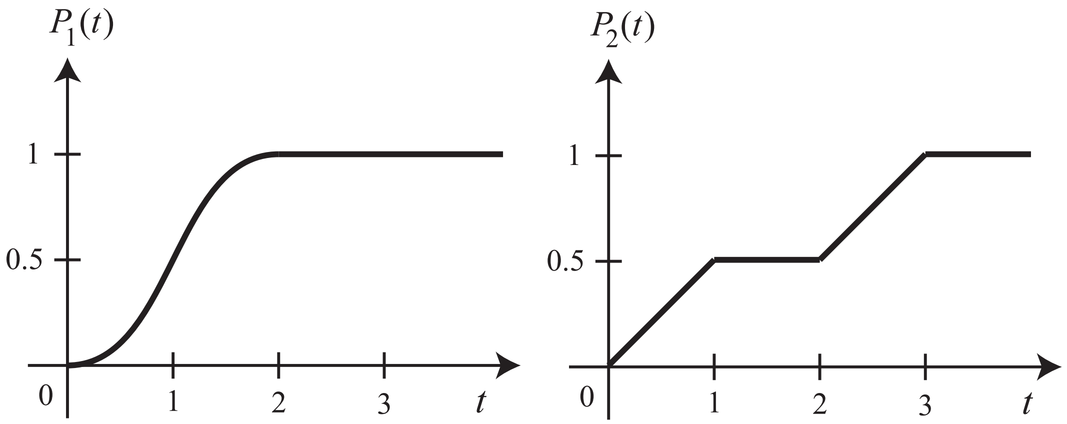


図 7: 例の部品の故障率 $P_1(t)$ と $P_2(t)$.

$$R_1(t) = 1 - P_1(t), \qquad R_2(t) = 1 - P_2(t)$$

なので，グラフの概形は図 8 である．各部品の平均寿命は,

$$E[f_1] = \int_0^\infty t f_1(t)dt = \int_0^\infty R_1(t)dt = 1$$
$$E[f_2] = \int_0^\infty t f_2(t)dt = \int_0^\infty R_2(t)dt = 1.5$$

である．

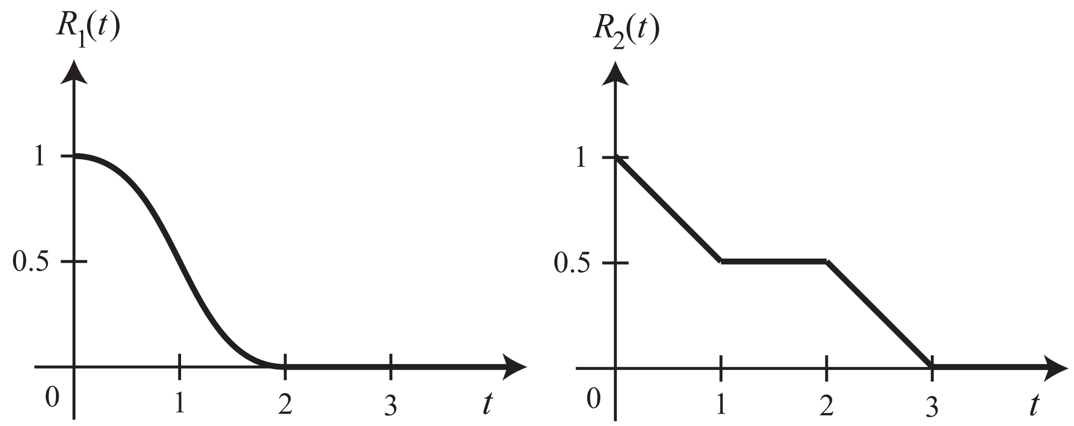


図 8: 例の部品の信頼度 $R_1(t)$ と $R_2(t)$.

### 2.3.1 直列接続

直列接続の場合のシステム全体の信頼度は $R(t) = R_1(t)R_2(t)$ なので,

$$R(t) = R_1(t)R_2(t) = \begin{cases} (1-t^2/2)(1-t/2), & 0 \le t \le 1, \\ (t-2)^2/4, & 1 \le t \le 2, \\ 0, & 2 \le t. \end{cases}$$
$$= \begin{cases} t^3/4 - t^2/2 - t/2 + 1, & 0 \le t \le 1, \\ t^2/4 - t + 1 & 1 \le t \le 2, \\ 0, & 2 \le t. \end{cases}$$

故障率は,

$$P(t) = 1 - R(t) = \begin{cases} -t^3/4 + t^2/2 + t/2, & 0 \le t \le 1, \\ -t^2/4 + t, & 1 \le t \le 2, \\ 1, & 2 \le t. \end{cases}$$

故障密度関数は,

$$f(t) = \frac{d}{dt}P(t) = \begin{cases} -3t^2/4 + t + 1/2, & 0 \le t \le 1, \\ -t/2 + 1, & 1 \le t \le 2, \\ 0, & 2 \le t. \end{cases}$$

平均寿命は,

$$
\begin{aligned}
E[f] &= \int_0^\infty R(t)dt \\
&= \int_0^1 R(t)dt + \int_1^2 R(t)dt + \int_2^\infty R(t)dt \\
&= \int_0^1 (t^3/4 - t^2/2 - t/2 + 1)dt + \int_1^2 (t^2/4 - t + 1)dt + \int_2^\infty 0dt \\
&= \left[t^4/16 - t^3/6 - t^2/4 + t\right]_0^1 + \left[t^3/12 - t^2/2 + t\right]_1^2 \\
&= 31/48 + 1/12 = 35/48
\end{aligned}
$$

である．平均寿命は，直列接続するとそれぞれの部品の平均寿命より短くなる．

### 2.3.2 並列接続

並列接続の場合には，システム全体の故障率は $P(t) = P_1(t)P_2(t)$ なので,

$$
P(t) = P_1(t)P_2(t) = \begin{cases} t^3/4, & 0 \le t \le 1, \\ 1/2 - (t-2)^2/4, & 1 \le t \le 2, \\ t/2 - 1/2, & 2 \le t \le 3, \\ 1, & 3 \le t. \end{cases}
$$

故障密度関数 $f(t)$ は,

$$
f(t) = \frac{d}{dt}P(t) = \begin{cases} 3t^2/4, & 0 \le t \le 1, \\ -(t-2)/2, & 1 \le t \le 2, \\ 1/2, & 2 \le t \le 3, \\ 0, & 3 \le t. \end{cases}
$$

システム全体の信頼度は $R(t) = 1 - P(t)$ であるから,

$$
R(t) = 1 - P(t) = \begin{cases} 1 - t^3/4, & 0 \le t \le 1, \\ 1/2 + (t-2)^2/4, & 1 \le t \le 2, \\ 3/2 - t/2, & 2 \le t \le 3, \\ 0, & 3 \le t. \end{cases}
$$

平均寿命は

$$
\begin{aligned}
E[f] &= \int_0^\infty R(t)dt \\
&= \int_0^1 R(t)dt + \int_1^2 R(t)dt + \int_2^3 R(t)dt + \int_3^\infty R(t)dt \\
&= \int_0^1 (1 - t^3/4)dt + \int_1^2 (1/2 + (t-2)^2/4)dt + \int_2^3 (3/2 - t/2)dt + \int_3^\infty 0\,dt \\
&= \left[t - t^4/16\right]_0^1 + \left[t/2 + (t-2)^3/12\right]_1^2 + \left[3t/2 - t^2/4\right]_2^3 \\
&= 15/16 + [(1+0) - (1/2 - 1/12)] + [(9/2 - 9/4) - (3 - 1)] \\
&= 15/16 + 7/12 + 1/4 = 85/48
\end{aligned}
$$

である．平均寿命は，並列接続するとそれぞれの部品の平均寿命より長くなる．