2011・3・16 1

$$\hat{f}(\xi) = \int f(x)\, e^{-ix\xi}\, dx$$

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi)\, e^{ix\xi}\, d\xi$$

パーセヴァルの等式
Parseval

$$\langle f, g\rangle = \frac{1}{2\pi}\langle \hat{f}, \hat{g}\rangle$$

$$\langle \hat{f}, \hat{g}\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi)\, \hat{g}(\xi)\, d\xi$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi) \left(\int_{-\infty}^{\infty} g(y)\, e^{-iy\xi}\, dy\right) d\xi$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi)\, \overline{g(y)}\, e^{iy\xi}\, dy\, d\xi$$

$$\xi \quad y$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} 2\pi f(y)\, \overline{g(y)}\, dy$$

$$y$$

$$= 2\pi \langle f, g\rangle$$

プランツェルの定理

$$\langle f, f\rangle = \frac{1}{2\pi}\langle \hat{f}, \hat{f}\rangle$$

$$\|f\|_2 = \frac{1}{2\pi}\|\hat{f}\|_2$$

$\psi(x)$ ウェーブレット関数

$$C_\psi = \int_0^\infty \frac{|\hat{\psi}(t)|}{|t|}dt = \int_{-\infty}^0 \frac{|\hat{\psi}(t)|^2}{|t|}dt < +\infty$$

逆変換が成立するための条件

$a>0,\ b\in\psi$

$$T_b D_a \psi(x) = T_b \frac{1}{\sqrt{a}}\psi\left(\frac{x}{a}\right) = \frac{1}{\sqrt{a}}\psi\left(\frac{x-b}{a}\right)$$

Continuous Wavelet Transtirm
連続ウェーブレット変換

$$(W_\psi f)(b,a) = \langle f, T_b D_a \psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{a}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\overline{\psi\left(\frac{x-b}{a}\right)}\,dx$$

復習 2011/2/23

$T_x f(t) = f(t-x)$

$D_\rho f(t) = \frac{1}{\sqrt{\rho}} f\left(\frac{t}{\rho}\right)$

$$C_\psi f(x) = \iint (W_\psi f)(b,a)\, T_b D_a \psi(x)\, \frac{da\,db}{a^2}$$

$a\in\mathbb{R}_+,\ b\in\mathbb{R}$

$\mathbb{R}_+ = (0,\infty)$

逆連続ウェーブレット変換

$$(右辺) = \iiint f(t)\,\overline{T_b D_a \psi(t)}\,dt\, T_b D_a \psi(x)\frac{da\,db}{a^2}$$

$\psi^-(t) = \psi(-t)$

$$= \iiint f(t)\frac{1}{\sqrt{a}}\overline{\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)}\frac{1}{\sqrt{a}}\psi\left(\frac{x-b}{a}\right)\frac{da\,db}{a^2}$$

$$= \iiint f(t)\frac{1}{\sqrt{a}}\psi^-\left(\frac{b-x}{a}\right)\frac{1}{\sqrt{a}}\overline{\psi^-\left(\frac{b-t}{a}\right)}\frac{da\,db}{a^2}$$

b積分 $\langle T_x D_a \psi^-, T_t D_a \psi^-\rangle = \frac{1}{2\pi}\langle \mathcal{F} T_x D_a \psi^-, \mathcal{F} T_t D_a \psi^-\rangle$

内積

$\mathcal{F} T_x D_a \psi^-$

$= M_{-x}\mathcal{F} D_a \psi^-$

$= M_{-x} D_{1/a}\mathcal{F}\psi^-$

$\mathcal{F} T_x = M_{-x}\mathcal{F}$

$\mathcal{F} D_a = D_{1/a}\mathcal{F}$

b積分 $= \frac{1}{2\pi}\langle M_{-x} D_{1/a}\mathcal{F}\psi^-, M_{-t} D_{1/a}\mathcal{F}\psi^-\rangle$

$= \frac{1}{2\pi}\langle M_{-x} D_{1/a}\hat{\psi}_{(-\xi)}, M_{-t} D_{1/a}\hat{\psi}_{(-\xi)}\rangle$

$= \frac{1}{2\pi}\langle \underbrace{M_{-x}}_{e^{-ix\xi}}\sqrt{a}\,\hat{\psi}(-a\xi), \underbrace{M_{-t}}_{e^{-it\xi}}\sqrt{a}\,\hat{\psi}(-a\xi)\rangle$

$= \frac{1}{2\pi}\int e^{-ix\xi}\sqrt{a}\,\hat{\psi}(-a\xi)\,\overline{e^{-it\xi}\sqrt{a}\,\hat{\psi}(-a\xi)}\,d\xi$

$$(\text{逆変換の式}) = \frac{1}{2\pi}\iiint f(t)\, e^{-ix\xi}\, e^{it\xi}\, |\hat{\varphi}(-a\xi)|^2\, d\xi\, \frac{dt\,da}{a}$$

a積分

$$\int_0^\infty \frac{|\hat{\varphi}(a\xi)|^2}{a}\,da = \int_0^\infty \frac{|\hat{\varphi}(y)|^2}{+\frac{y}{\xi}} = \int_0^{\infty} \frac{|\hat{\varphi}(y)|^2}{-|y|}\,dy$$

$y = -a\xi$ とおく

$a: 0 \to \infty$　　$dy = -\frac{dy}{\xi}$

$-\frac{y}{\xi}$　　$y: 0 \to \infty$

$$= \int_{-\infty}^{0} \frac{|\hat{\varphi}(y)|^2}{|y|}\,dy = C_\varphi$$

$$(\text{逆変換の式}) = \frac{C_\varphi}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(-\xi)\, e^{-i\,t\xi}\, d\xi \qquad -\xi = y$$

$$= \frac{C_\varphi}{2\pi}\int_{\infty}^{-\infty} \hat{f}(y)\, e^{ixy}(-dy) = \frac{C_\varphi}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(y)\, e^{ixy}\,dy = C_\varphi f(x)$$

$$\int_0^\infty \frac{|\hat{f}(y)|^2}{y}\,dy = C_x$$

$$C_\psi\langle f, g\rangle = \iint (W_\psi f)(b,a)\,\overline{(W_\psi g)(b,a)}\,\frac{da\,db}{a^2}$$

内積の保存式

$$a\in\mathbb{R}_+,\ b\in\mathbb{R}$$

$$= \iint_{a\in\mathbb{R}_+,\ b\in\mathbb{R}} \underbrace{\boxed{\int f(x)\frac{1}{\sqrt{a}}\psi\left(\frac{x-b}{a}\right)dx}}_{(W_\psi f)(b,a)}\ \overline{\int g(t)\frac{1}{\sqrt{a}}\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)dt}\ \frac{da\,db}{a^2}$$

$$= \iiint_{f\in\mathbb{R}\ a\ b} (W_\psi f)(b,a)\ \overline{g(t)}\ \overline{\frac{1}{\sqrt{a}}\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)}\ \frac{da\,db}{a^2}\,dt$$

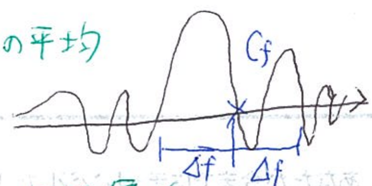
$$= \int_{f\in\mathbb{R}} C_\psi f(t)\ \overline{g(t)}\ dt$$

$$= C_\psi\langle f, g\rangle$$

まど関数 $f(x)$

中心 $C_f = \int_{-\infty}^{\infty} x \frac{|f(x)|^2}{\int_{-\infty}^{\infty}|f(y)|^2 db} dx$

M+の平均



巾 $\Delta f = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty}(x-C)^2 \frac{|f(x)|^2}{\int_{-\infty}^{\infty}|f(y)|^2 dy} dx}$ M_+ の標準偏差

$$M_+(x) = \frac{|f(x)|^2}{\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|^2 dx} \geq 0$$

$$\int M_+(x)\,dx = 1$$

ハット付きの方も同じように…… $C_{\hat f} = \int_{-\infty}^{\infty} \xi \frac{|\hat f(\xi)|^2}{\int_{-\infty}^{\infty}|\hat f(\eta)|^2 d\eta} d\xi$

$$\Delta \hat f = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty}(\xi - C_f)^2 \frac{|f(\xi)|^2}{\int_{-\infty}^{\infty}|\hat f(\eta)|\, d\eta} d\xi}$$

$$[C_f - \Delta f,\ C_f + \Delta f] \times [C_{\hat f} - \Delta \hat f,\ C_{\hat f} + \hat f]$$

$\Delta f \Delta \hat f \geq \frac{1}{2}$ $f = e^{-\frac{x^2}{2}} \leq$ えっち間周波数？ 不確定性定理

<g, f>は信号からfの時間周波数まで情報をaccessしている。