

解析学 II 試験
2015/2/6

- 注:(1) この試験で考える $\mathbb{R}$ や $[0, 1]$ 上の測度は全て Lebesgue 測度とする.
(2) 「求めよ」という問題等も答えだけではなくちゃんと証明すること.
(3) 解答用紙は裏も使ってよいが順番を右上に明記すること.

1. $\ell^\infty(\mathbb{N}) := \{\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{C} \mid \sup_{n \in \mathbb{N}} |a_n| < \infty\}$ とおき, $\|\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}\|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{N}} |a_n|$ と定める. 数列の自然な和と複素数倍および $\|\cdot\|_\infty$ によって $\ell^\infty(\mathbb{N})$ は Banach 空間となることを示せ. ($\|\cdot\|_\infty$ がノルムの性質を満たすことと完備性の証明のみでよい.)

2. $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^\infty(\mathbb{N})$ を一つ固定する. $\ell^2(\mathbb{N})$ 上の作用素 A を

$$A\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} := \{a_n x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$$

と定める.

- (1) A は有界線型作用素であることを示し, 作用素ノルム $\|A\|$ を求めよ.
(2) 共役作用素 A^* を求めよ. また, A が正作用素となる $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ の必要十分条件を求めよ.
(3) A のスペクトルを求めよ.

3. (1) 閉区間 $[0, 1]$ 上の連続関数列で各点収束するが, 一様収束しない例を挙げよ.
(2) 閉区間 $[0, 1]$ 上の連続関数列で各点収束するが, L^1 -収束しない例を挙げよ.
(3) $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ を L^1 -収束する $\mathbb{R}$ 上の可積分関数列とする. このとき, ある部分列 $\{f_{n(k)}\}_{k \in \mathbb{N}}$ が存在して $\{f_{n(k)}\}_{k \in \mathbb{N}}$ は $\mathbb{R}$ 上のある可積分関数にほとんど至るところ各点収束することを示せ.

4. 任意の $t \in \mathbb{R}$ に対して $L^2(\mathbb{R})$ 上の作用素 U_t を

$$U_t(f)(x) := f(x - t), \quad x \in \mathbb{R}$$

と定める.

- (1) 任意の $t \in \mathbb{R}$ に対して U_t はユニタリ作用素であることを示せ.
(2) 任意の $f \in L^2(\mathbb{R})$ に対して

$$\lim_{t \rightarrow 0} \|U_t(f) - f\|_2 = 0$$

となることを示せ.