

解析学 II 試験
2016/2/5

注:(1) この試験で考える $\mathbb{R}$ や $[0, 1]$ 上の測度はすべて Lebesgue 測度とする.

(2) 解答用紙は裏も使ってよいが, 順番を右上に明記すること.

1. $\ell^1(\mathbb{N}) := \{\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{C} \mid \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty\}$ とおき, $\|\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}\|_1 = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ と定める. 数列の自然な和と複素数倍および $\|\cdot\|_1$ によって $\ell^1(\mathbb{N})$ は可分 Banach 空間となることを示せ. ($\|\cdot\|_1$ がノルムの性質を満たすこと, 完備性, 可分性の証明のみでよい.)

2. (1) 閉区間 $[0, 1]$ 上の連続関数列 $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ を

$$f_n(x) = \frac{x}{x + \frac{1}{n}}$$

と定める. $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ は各点収束, 一様収束, L^1 -収束するかどうか調べよ.

(2) f を $f(0) = 0$ となる閉区間 $[0, 1]$ 上の正值連続関数とする. 閉区間 $[0, 1]$ 上の連続関数列 $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ を

$$f_n(x) = \frac{xf(x)}{x + \frac{1}{n}}$$

と定める. $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ は各点収束, 一様収束, L^1 -収束するかどうか調べよ.

(3) 閉区間 $[0, 1]$ 上の連続関数列で各点収束するが, L^1 -収束しない例を挙げよ.

3. 閉区間 $[0, 1]$ 上の複素数値連続関数 f が

$$\int_0^1 x^{2n} \overline{f(x)} dx = 0 \quad \text{for all } n \in \mathbb{N}$$

かつ

$$\int_0^1 \overline{f(x)} dx = 0$$

を満たすならば, $f = 0$ となることを示せ.

4. H を無限次元 Hilbert 空間とする. このとき, $S = \{x \in H \mid \|x\| = 1\}$ はコンパクトでないことを示せ.

5. $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ を 0 に L^1 -収束する $\mathbb{R}$ 上の可積分関数列とする. このとき, ある部分列 $\{f_{n(k)}\}_{k \in \mathbb{N}}$ が存在して

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f_{n(k)}(x) = 0 \quad \text{a.e. } x \in \mathbb{R}$$

となることを示せ.