解析学II 試験
2017/2/10

注:(1) この試験で考える $\mathbb{R}$ や $[0,1]$ 上の測度はすべて Lebesgue 測度とする.
(2) 解答用紙は裏も使ってよいが, 順番を右上に明記すること.

1. $H := \left\{ \{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{C} \mid \sum_{n=1}^{\infty} n^2 |a_n|^2 < \infty \right\}$ と定める. 任意の $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}, \{b_n\}_{n=1}^{\infty} \in H$ に対して,

$$\langle \{a_n\}_{n=1}^{\infty}, \{b_n\}_{n=1}^{\infty} \rangle := \sum_{n=1}^{\infty} n^2 a_n \overline{b_n}$$

と定める. 以下の問いに答えよ.
(1) H は通常の数列の和とスカラー倍および上で定めた $\langle \cdot, \cdot \rangle$ で, 内積空間になることを示せ.
(注：$\langle \{a_n\}_{n=1}^{\infty}, \{b_n\}_{n=1}^{\infty} \rangle$ が収束することも示すこと.)
(2) H は Hilbert 空間であることを示せ.
(3) H は可分であることを示せ.
(4) H の CONS を 1 つ挙げよ.

2. (1) 閉区間 $[0,1]$ 上の連続関数列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ を

$$f_n(x) = \frac{1}{x^{\frac{1}{n}} + 1}$$

と定める. $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ は各点収束, 一様収束, L^1-収束するかどうか調べよ.
(注：収束する場合は, 収束先の関数を明記すること.)
(2) 実数 $\mathbb{R}$ 上の連続関数列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ を

$$f_n(x) = \frac{ne^{-x^2+x}}{ne^x + 1}$$

と定める. $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ は L^1-収束するかどうか調べよ.
(注：収束する場合は, 収束先の関数を明記すること.)

3. $(X, \|\cdot\|)$ を Banach 空間として, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ を X 内の点列とする.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| < \infty$$

ならば X 内の点列 $\left\{ \sum_{n=1}^{N} x_n \right\}_{N=1}^{\infty}$ は収束することを示せ.

4. Banach 空間 $(C([0,1] \times [0,1]), \|\cdot\|_{\infty})$ は可分であることを示せ.

5. 可分 Hilbert 空間には CONS が存在することを示せ.