

解析学 期末試験

2017/2/9

注:(1) この試験で考える $\mathbb{R}$ や $[0, 1]$ 上の測度はすべて Lebesgue 測度とする.

(2) 解答用紙は裏も使ってよいが, 順番を右上に明記すること.

1. $H := \left\{ \{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{C} \mid \sum_{n=1}^{\infty} |2^n a_n|^2 < \infty \right\}$ と定める. 任意の $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}, \{b_n\}_{n=1}^{\infty} \in H$ に対して,

$$\langle \{a_n\}_{n=1}^{\infty}, \{b_n\}_{n=1}^{\infty} \rangle := \sum_{n=1}^{\infty} 2^{2n} a_n \overline{b_n}$$

と定める. 以下の問いに答えよ.

(1) H は通常の数値の和とスカラー倍および上で定めた $\langle \cdot, \cdot \rangle$ で, 内積空間になることを示せ.

(注: $\langle \{a_n\}_{n=1}^{\infty}, \{b_n\}_{n=1}^{\infty} \rangle$ が収束することも示すこと.)

(2) H は Hilbert 空間であることを示せ.

(3) H は可分であることを示せ.

(4) H の CONS の例を 1 つ挙げよ. (注: ちゃんと CONS になることも証明すること.)

2. (1) 閉区間 $[0, 1]$ 上の連続関数列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ を

$$f_n(x) = e^{x^n}$$

と定める. $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ は各点収束, 一様収束, L^1 -収束するかどうか調べよ.

(注: 収束する場合は, 収束先の関数を明記すること.)

(2) 実数 $\mathbb{R}$ 上の連続関数列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ で一様収束するが, L^1 -収束しないような例を挙げよ.

(注: もちろん, 証明もすること.)

3. $(X, \|\cdot\|)$ をノルム空間とする. X が Banach 空間である必要十分条件は, 「任意の X 内の点列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ に対して,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| < \infty$$

ならば X 内の点列 $\left\{ \sum_{n=1}^N x_n \right\}_{N=1}^{\infty}$ は収束する」であることを示せ.

4. f を $[-\pi, \pi]$ 上の複素数値連続関数で $f(\pi) = f(-\pi)$ をみたすものとする. 任意の整数 n に対して,

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{inx} \overline{f(x)} dx = 0$$

をみたすならば, $f = 0$ となることを示せ.