

解析学 期末試験

2018/2/8

注:(1) この試験で考える $\mathbb{R}$ や $[0, 1]$ 上の測度はすべて Lebesgue 測度とする.

(2) 答えだけではなく, 丁寧に理由も書くこと. また, 定理を使う場合は使った定理を明記すること.

(3) 解答用紙は裏も使ってよいが, 順番を右上に明記すること.

1. $H := \left\{ \{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{C} \mid \sum_{n=1}^{\infty} |n^2 a_n|^2 < \infty \right\}$ と定める. 任意の $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}, \{b_n\}_{n=1}^{\infty} \in H$ に対して,

$$\langle \{a_n\}_{n=1}^{\infty}, \{b_n\}_{n=1}^{\infty} \rangle := \sum_{n=1}^{\infty} n^4 a_n \overline{b_n}$$

と定める. 以下の問いに答えよ.

(1) H は通常の数列の和とスカラー倍および上で定めた $\langle \cdot, \cdot \rangle$ で, 内積空間になることを示せ.

(注: $\langle \{a_n\}_{n=1}^{\infty}, \{b_n\}_{n=1}^{\infty} \rangle$ が収束することも示すこと.)

(2) H は Hilbert 空間であることを示せ.

(3) H は可分であることを示せ.

(4) H の CONS の例を 1 つ挙げよ. (注: ちゃんと CONS になることも証明すること.)

2. (1) $\mathbb{R}$ 上の連続関数列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ を

$$f_n(x) = \frac{n \sin x}{nx^2 + e^x + n}$$

と定める. $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ は L^1 -収束するかどうか調べよ.

(注: 収束する場合は, 収束先の関数を明記すること.)

(2) $[0, 1]$ 上の連続関数列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ を

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } x \in [0, \frac{1}{2}] \\ 2nx - n + 1 & \text{if } x \in (\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \frac{1}{2n}] \\ 2 & \text{if } x \in (\frac{1}{2} + \frac{1}{2n}, 1] \end{cases}$$

と定める. $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ は各点収束, 一様収束, L^1 -収束するかどうか調べよ.

(注: 収束する場合は, 収束先の関数を明記すること.)

3. $[0, 1] \times [0, 1]$ 上の連続関数全体からなるノルム空間 $C([0, 1] \times [0, 1])$ を考える. 以下の問いに答えよ.

(注: 通常関数の和, スカラー倍および $\|f\|_{\infty} = \sup\{|f(z)| : z \in [0, 1] \times [0, 1]\}$ によるノルム空間と考える.)

(1) $C([0, 1] \times [0, 1])$ は Banach 空間であることを示せ. (ノルム空間であることを示す必要はない.)

(2) $C([0, 1] \times [0, 1])$ は可分であることを示せ.

4. H を無限次元 Hilbert 空間とする. $\{x \in H \mid \|x\| \leq 1\}$ はコンパクトでないことを示せ.