解析学概論 I, II　期末試験
2016/8/3

注：解答用紙は裏も使ってよいが, 解答の順番を右上に明記すること.
　Log は $\mathbb{C}\setminus(-\infty,0]$ で定義された対数関数の主値とする. つまり, $r>0, -\pi<\theta<\pi$ に対して, $\mathrm{Log}\, re^{i\theta} = \log r + i\theta$.

1. (1) 任意の $z\in\mathbb{C}$ に対して, $\cosh z := \dfrac{e^z+e^{-z}}{2}$ と定める. このとき, $\cosh z = 0$ となる複素数 z をすべて求めよ.
(2) 多価関数として, $(e^{\frac{\pi}{2}}i)^i$ がとりうる値をすべて求めよ.
(3) 任意の $z\in\mathbb{C}$ に対して, $f(z)=\sin^2 z$ と定める. このとき, f は $\mathbb{C}$ 上有界であるかどうか判定せよ.
(4) 任意の $x+iy\in\mathbb{C}\,(x,y$ は実数$)$ に対して, $f(x+iy)=x+y$ と定める. このとき, f は $\mathbb{C}$ 上正則であるかどうか判定せよ.

2.
$$\mathrm{Log}\, zw \neq \mathrm{Log}\, z + \mathrm{Log}\, w$$
となる $z,w\in\mathbb{C}\setminus(-\infty,0]$ の例を一組挙げよ. ただし, $zw\in\mathbb{C}\setminus(-\infty,0]$ も満たす例にすること.

3. (1) $z\in\mathbb{C}\setminus(-\infty,0]$ に対して, $f(z)=(z-1)\mathrm{Log}\, z$ と定める. f を $z=1$ で Taylor 展開し, 求めたべき級数の収束半径を求めよ.
(2) $z\in\mathbb{C}\setminus\{0,1\}$ に対して, $f(z)=\dfrac{1}{z(1-z)^2}$ と定める. f を $0<|z|<1$ で Laurent 展開せよ.

4. $r>0$ かつ $r\neq 1$ とする.　このとき,
$$\oint_{|z-1|=r} ze^{\frac{1}{z}}\, dz$$
を求めよ.

5. 留数を用いて,
$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{3+\cos\theta}\, d\theta$$
を求めよ.

6. 留数を用いて,
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2+4)^2}\, dx$$
を求めよ.

7. $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ を閉区間 $[0,1]$ 上の連続関数列とする. 任意の $n\in\mathbb{N}$ に対して, ある $M_n>0$ が存在して
$$\sup_{t\in[0,1]} |f_n(t)| \leq M_n \qquad \text{かつ} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} M_n < \infty$$
を満たすならば, 次が成立することを証明せよ.
(1) 任意の $t\in[0,1]$ に対して, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n(t)$ は収束する.
(2) 閉区間 $[0,1]$ 上の連続関数列 $\left\{\displaystyle\sum_{n=1}^{N} f_n\right\}_{N=1}^{\infty}$ は一様収束する.