解析学概論 I, II　期末試験
2017/7/28

注：解答用紙は裏も使ってよいが, 解答の順番を右上に明記すること.
　答えだけではなく, 理由や使った定理などを明記すること.
　Log は $\mathbb{C}\setminus(-\infty,0]$ で定義された対数関数の主値とする. つまり, $r>0, -\pi<\theta<\pi$ に対して,
　$\mathrm{Log}\, re^{i\theta}=\log r+i\theta$.

1. (1) $\sin z=\cos z$ となる複素数 z をすべて求めよ.
(2) 多価関数として, i^i がとりうる値をすべて求めよ.
(3) 任意の $z\in\mathbb{C}$ に対して, $f(z)=\sin z-\cos z$ と定める. このとき, f は $\mathbb{C}$ 上有界であるかどうか判定せよ.
(4) 任意の $x+iy\in\mathbb{C}$ (x,y は実数) に対して, $f(x+iy)=e^{x^2y}+ie^{xy}$ と定める. このとき, f は $\mathbb{C}$ 上正則であるかどうか判定せよ.

2. $\alpha\in\mathbb{C}$ と $z\in\mathbb{C}\setminus(-\infty,0]$ に対して, $z^\alpha:=e^{\alpha\mathrm{Log}\, z}$ と定める.
(1) $\alpha=i$ のとき, $(zw)^\alpha\neq z^\alpha w^\alpha$ となる $z,w\in\mathbb{C}\setminus(-\infty,0]$ の組を一組挙げよ. (注：$zw\in\mathbb{C}\setminus(-\infty,0]$ も満たすこと.)
(2) $\alpha=i$ のとき, $f(z)=z^\alpha$ を $z=1$ で Taylor 展開し, 求めたべき級数の収束半径を求めよ.
(3) $zw\in\mathbb{C}\setminus(-\infty,0]$ となる任意の $z,w\in\mathbb{C}\setminus(-\infty,0]$ に対して, $(zw)^\alpha=z^\alpha w^\alpha$ が成り立つような α の必要十分条件を述べよ. (証明はしなくてもよいが, 証明もちゃんとできていたらボーナスとして点数を加える.)

3. (1) $z\in\mathbb{C}\setminus\{0,1\}$ に対して, $f(z)=\dfrac{1}{z^3(z-1)^2}$ と定める. f を $z=0$ のまわりで Laurent 展開せよ. ただし, どのような z で Laurent 展開できるか明記すること.
(2) $z\in\mathbb{C}\setminus\{0,\frac{3}{2}\}$ に対して, $f(z)=\dfrac{1}{(z-1)^4(3-2z)}$ と定める. f を $z=1$ のまわりで Laurent 展開せよ. ただし, どのような z で Laurent 展開できるか明記すること.

4. 次の積分の値を求めよ.

$$\oint_{|z|=1} z^2 e^{\frac{1}{z}}dz$$

5. $r>0$ かつ $r\neq 1,2$ とする.　このとき,

$$\oint_{|z|=r}\frac{e^z}{(z-1)(z-2)^3}\,dz$$

を求めよ.

6. 留数を用いて,

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{x^4+1}\,dx$$

を求めよ.

7. $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ を閉区間 $[0,1]$ 上の連続関数列とする. 任意の $n\in\mathbb{N}$ に対して, ある $M_n>0$ が存在して

$$\sup_{t\in[0,1]}|f_n(t)|\leq M_n \qquad \text{かつ} \qquad \sum_{n=1}^\infty M_n<\infty$$

を満たすならば, 次が成立することを証明せよ.
(1) 任意の $t\in[0,1]$ に対して, $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty f_n(t)$ は収束する.
(2) 閉区間 $[0,1]$ 上の連続関数列 $\displaystyle\left\{\sum_{n=1}^N f_n\right\}_{N=1}^\infty$ は一様収束する.