

解析学 A,B 期末試験

2018/8/3

注：解答用紙は裏も使ってよいが、解答の順番を右上に明記すること。

答えだけではなく、理由や使った定理などを明記すること。

Log は $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ で定義された対数関数の主値とする。つまり、 $r > 0, -\pi < \theta < \pi$ に対して、

$\text{Log } re^{i\theta} = \log r + i\theta$. ($\log$ は通常の実関数としての対数関数.)

1. (1) $\sin z = i$ となる複素数 z をすべて求めよ.
- (2) 多価関数として、 $(-i)^i$ がとりうる値をすべて求めよ.
- (3) 任意の $z \in \mathbb{C}$ に対して、 $f(z) = \cos z^2$ と定める。このとき、 f は $\mathbb{C}$ 上有界であるかどうか判定せよ.
- (4) 任意の $x + iy \in \mathbb{C}$ (x, y は実数) に対して、 $f(x + iy) = e^{x^2 y} + ie^{xy^2}$ と定める。このとき、 f は $\mathbb{C}$ 上正則であるかどうか判定せよ.
- (5) $e^z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ となる任意の $z \in \mathbb{C}$ に対して、

$$\text{Log } e^z = z$$

は成り立つか？ (注：成り立つならば証明せよ。成り立たないならば反例をひとつ挙げ、ちゃんと反例になっていることを示せ.)

2. (1) $z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, -1]$ に対して、 $f(z) = e^{-\frac{1}{2}\text{Log}(z+1)}$ と定める。 f を $z = 0$ のまわりで Taylor 展開せよ。また、求めたべき級数の収束半径を求めよ.

- (2) $z \in \mathbb{C} \setminus \{1, \frac{4}{3}\}$ に対して、 $f(z) = \frac{1}{(z-1)^2(4-3z)}$ と定める。 f を $z = 1$ のまわりで Laurent 展開せよ。ただし、どのような z で Laurent 展開できるか明記すること.

3. $r > 0$ かつ $r \neq 1, 2$ とする。このとき、次の積分の値を求めよ.

$$(1) \oint_{|z|=r} z^3 \cos \frac{1}{z} dz \quad (2) \oint_{|z|=r} \frac{e^{-z}}{(z-1)^3(z-2)} dz$$

4. 留数を用いて、

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{3 + \sin \theta} d\theta$$

を求めよ.

5. 留数を用いて、

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^4 + 2x^2 + 1} dx$$

を求めよ.

6. $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ を閉区間 $[0, 1]$ 上の連続関数列とし、 $0 < M < 1$ とする。任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して、

$$\sup_{t \in [0, 1]} |f_n(t)| \leq M^n$$

を満たすならば、次が成立することを証明せよ.

- (1) 任意の $t \in [0, 1]$ に対して、 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(t)$ は収束する.

- (2) 閉区間 $[0, 1]$ 上の連続関数列 $\left\{ \sum_{n=1}^N f_n \right\}_{N=1}^{\infty}$ は一様収束する.