

線型代数学 A 期末試験

2017/11/27

注：解答用紙は裏も使ってよいが、解答用紙の順番を右上に明記すること。

答えだけではなく、途中の式や理由等も書くこと。

$n$  は自然数とする。

1. 次の行列が対角化できるかどうか判定し、対角化できるならば対角化せよ。

$$(1) \begin{pmatrix} 3 & -4 & 2 \\ -2 & 5 & -2 \\ -4 & 8 & -3 \end{pmatrix} \quad (2) \begin{pmatrix} 7 & -2 & 1 \\ 8 & -1 & 2 \\ -4 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

2. 1 の (1) と (2) の行列は相似であるかどうか理由とともに答えよ。

3. 次の行列の  $n$  乗を求めよ。( $2^n$  や  $(-1)^n$  等を用いて表して良い。また、 $n$  の偶奇で場合分けしても良い。)

$$\begin{pmatrix} 5 & -2 & -2 \\ 6 & -4 & -3 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

4.  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k \in \mathbb{C}^n$  とする。  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k$  が正規直交系ならば  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k$  は線型独立であることを示せ。

5.  $A$  を  $n$  次正方行列として、 $\alpha$  を複素数とする。  $V(\alpha)$  は  $\mathbb{C}^n$  の部分空間であることを示せ。

ただし、 $V(\alpha) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n \mid A\mathbf{x} = \alpha\mathbf{x}\}$  である。

6.  $U$  をユニタリ行列とする。このとき、 $U$  の固有値は絶対値 1 の複素数であることを示せ。

7. (1)  $A$  と  $B$  をユニタリ行列とする。このとき、積  $AB$  はユニタリ行列になることを示せ。

- (2) エルミート行列  $A, B$  で積  $AB$  はエルミート行列にならないような行列の例を一組挙げよ。

8. (1)  $A$  は  $n$  次正方行列で、重複度  $n$  の固有値  $\alpha$  を持つものとする。  $A$  が対角化可能であることの必要十分条件は  $A$  が対角行列であることを示せ。

- (2) 固有値が 1 (重複度 4) であり、対角化可能でない 4 次正方行列の例を一つ挙げよ。