線型代数学 A　期末試験

2018/11/26

注：解答用紙は裏も使ってよいが, 解答用紙の順番を右上に明記すること.
答えだけではなく, 途中の式や理由または証明等も書くこと.
n は自然数とする.

1. 次の行列が対角化できるかどうか判定し, 対角化できるならば対角化せよ.

$$(1)\ \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 2 & -4 & -1 \end{pmatrix} \qquad (2)\ \begin{pmatrix} -1 & 5 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

2. 1 の (1) と (2) の行列は相似であるかどうか理由とともに答えよ.

3. 次の行列の n 乗を求めよ. (3^n や $(-1)^n$ 等を用いて表して良い. また, n の偶奇で場合分けしても良い.)

$$\begin{pmatrix} 3 & -4 & -2 \\ 4 & -9 & -4 \\ -8 & 20 & 9 \end{pmatrix}$$

4. A をエルミート行列とする. このとき, A の固有値は実数であることを示せ.

5. A を $m \times n$ 行列とする. $\{\boldsymbol{y} \in \mathbb{C}^m \mid \boldsymbol{y} = A\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n\}$ は $\mathbb{C}^m$ の部分空間であることを示せ.

6. $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, ..., \boldsymbol{a}_k \in \mathbb{C}^n$ とする. $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, ..., \boldsymbol{a}_k$ が正規直交系ならば $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, ..., \boldsymbol{a}_k$ は $\mathrm{span}\langle \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, ..., \boldsymbol{a}_k \rangle$ の基底であることを示せ.
(注: $\mathrm{span}\langle \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, ..., \boldsymbol{a}_k \rangle$ は $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, ..., \boldsymbol{a}_k$ から生成される $\mathbb{C}^n$ の部分空間である.)

7. $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, ..., \boldsymbol{a}_k \in \mathbb{C}^n$ とし, U をユニタリ行列とする. $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, ..., \boldsymbol{a}_k$ が正規直交系ならば $U\boldsymbol{a}_1, U\boldsymbol{a}_2, ..., U\boldsymbol{a}_k$ は正規直交系であることを示せ.

8. 正方行列 A で, ある自然数 m が存在して, $A^m = 0$ を満たすものをべき零行列と呼ぶ.
(1) 零行列以外のべき零行列の例をひとつ挙げよ.
(2) (一般に) べき零行列 A の固有値をすべて求めよ.
(3) べき零行列が対角化可能である必要十分条件を求めよ.