

線型代数学 B 期末試験

2018/2/5

注：解答用紙は裏も使ってよいが、解答用紙の順番を右上に明記すること。

答えだけではなく、途中の式や理由等も書くこと。

i は虚数単位である。

1. 次の 3 つのベクトルを (この順番で) Gram-Schmidt による方法で正規直交化せよ。

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

2. 次の行列がユニタリ行列によって対角化できるかどうか判定し、ユニタリ行列によって対角化できるならばユニタリ行列によって対角化せよ。

$$(1) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \quad (2) \begin{pmatrix} i & i & 1 \\ i & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

3. 行列 A を

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -7 & 5 \\ 4 & -5 & 2 \\ -4 & 4 & -3 \end{pmatrix}$$

と定めたとき、 $A^{2018} + 3A^{2017} + 3E_3$ の固有値をすべて求めよ。

4. $V = \{p(x) \mid p(x) \text{ は高々 } 3 \text{ 次の複素係数多項式で } p(-1) = 0\}$ とする。任意の $p(x) \in V$ に対して、 $\varphi(p(x)) := (x+1)p'(x)$ と定める。ただし、 $p'(x)$ は形式的な微分である。以下の問いに答えよ。

- (1) V は (複素係数多項式全体からなる複素線型空間の) 部分空間であることを示せ。
- (2) V の基底を一組挙げ、 V の次元を求めよ。(注：挙げたものが基底になることの証明もすること。)
- (3) φ は V の線型変換であることを示せ。(注： V への写像になることもちゃんと確認すること。)
- (4) (2) の基底に関する φ の表現行列を求めよ。
- (5) φ の像と核の次元を求めよ。
- (6) φ のすべての固有値と各固有値に対する固有空間を求めよ。

5. 複素線型空間 $V = \{\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \mid \forall n \in \mathbb{N}, a_n \in \mathbb{C}, a_{n+3} = a_{n+2} - a_{n+1} + a_n\}$ を考える。 V の線型変換 φ を、 $\varphi(\{a_n\}_{n=1}^{\infty}) := \{a_{n+1}\}_{n=1}^{\infty}$ と定める。このとき、 φ のすべての固有値を求めよ。また、各固有値に対する各固有ベクトルはどのような数列であるか具体的に答えよ。

6. A を正規行列とする。 A がユニタリ行列であるための必要十分条件は A の固有値がすべて絶対値 1 の複素数であることを示せ。

7. A を正方行列として、 U をユニタリ行列とする。 A が正規行列であるための必要十分条件は UAU^* が正規行列であることを示せ。

8*. 実線型空間 $V = \{f \mid f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R} \text{ 連続関数}\}$ を考える。任意の自然数 n に対して、 V の n 個の線型独立なベクトルの例を挙げよ。