線型代数学 B　期末試験
2019/2/4

注：解答用紙は裏も使ってよいが, 解答用紙の順番を右上に明記すること.
答えだけではなく, 途中の式や理由等も書くこと.
i は虚数単位である.

1. 次の 3 つのベクトルを (この順番で)Gram-Schmidt による方法で正規直交化せよ.

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2. 次の行列が**ユニタリ行列によって**対角化できるかどうか判定し, **ユニタリ行列によって**対角化できるならば**ユニタリ行列によって**対角化せよ. (ユニタリ行列によって対角化できる場合も必ず理由を明記すること.)

$$(1)\quad \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad\qquad (2)\quad \begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 \\ -1 & 4 & 1 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

3. 行列 A を

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 5 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

と定めたとき, $A^{2019} - 3A^{2018} + 5E_3$ の固有値をすべて求めよ.

4. $V = \{p(x) \mid p(x)$ は高々3 次の複素係数多項式で $p(i) = 0\}$ とする. 任意の $p(x) \in V$ に対して, $\varphi(p(x)) := (x-i)p'(x)$ と定める. ただし, $p'(x)$ は形式的な微分である. 以下の問いに答えよ.
(1) V は (複素係数多項式全体からなる複素線型空間の) 部分空間であることを示せ.
(2) V の基底を一組挙げ, V の次元を求めよ. (注：挙げたものが基底になることの証明もすること.)
(3) φ は V の線型変換であることを示せ. (注：V への写像になることもちゃんと確認すること.)
(4) (2) の基底に関する φ の表現行列を求めよ.
(5) φ の像と核の次元を求めよ. また, φ は全単射であるかどうか判定せよ.
(6) φ のすべての固有値と各固有値に対する固有空間を求めよ.

5. 複素線型空間 $V = \{\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \mid \forall n \in \mathbb{N}, a_n \in \mathbb{C}, a_{n+3} = 2a_{n+2} + a_{n+1} - 2a_n\}$ を考える. V の線型変換 φ を, $\varphi(\{a_n\}_{n=1}^{\infty}) := \{a_{n+1}\}_{n=1}^{\infty}$ と定める. このとき, φ のすべての固有値を求めよ. また, 各固有値に対する各固有ベクトルはどのような数列であるか具体的に答えよ.

6. V_1 と V_2 を $\mathbb{K}$ 上の有限次元ベクトル空間とする. V_1 と V_2 が同型ならば, $\dim V_1 = \dim V_2$ となることを示せ.

7. A を正規行列とする. A がエルミート行列であるための必要十分条件は A の固有値がすべて実数であることを示せ.

8. A を n 次正方行列として, $B = A^*A$ と定める. このとき, 「すべての固有値が非負であるエルミート行列 C」が存在して

$$B = C^2$$

となることを示せ.