

ベクトル空間と行列の対角化 (線形代数学 II) 期末試験
2016/2/8

注: 解答用紙は裏も使ってよいが, 解答用紙の順番を右上に明記すること.

一週間以内に数理科学の掲示板に結果とレポート等 (追試や口頭試問を行う可能性も 0 ではありません) について掲示するので必ず確かめること. (大学のメールもチェックしてください.)

1. a を実数の定数とする. このとき, 次の連立一次方程式は解持つかどうか判定し, 持つならば全ての实数解を求めよ.

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = a \\ -x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 1 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_4 = 1 \\ 4x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 1 \end{cases}$$

2. 次のベクトルの組を Gram-Schmidt の方法で正規直交化せよ. (ただし, 内積は標準内積.)

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

3. 次の行列が対角化できるかどうか判定し, 対角化できるならば対角化せよ.

$$(1) \begin{pmatrix} 5 & -2 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 4 & -3 & -1 \end{pmatrix} \quad (2) \begin{pmatrix} 5 & 6 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ -2 & -6 & -2 \end{pmatrix}$$

4. 次のエルミート行列をユニタリ行列で対角化せよ.

$$\begin{pmatrix} 1 & i & 1 \\ -i & 1 & i \\ 1 & -i & 1 \end{pmatrix}$$

5. 複素ベクトル空間 U を $U := \{p(x) \mid p(x) \text{ は高々 } 3 \text{ 次の複素係数多項式}\}$ と定める.

- (1) $V := \{p(x) \mid p(x) \text{ は高々 } 3 \text{ 次の複素係数多項式で } p(1) = 0\}$ と定めたとき, V は U の部分空間になることを示せ.

- (2) V の基底を一組求めよ. (注: 求めたものが基底になることも証明すること.)

- (3) 任意の $p(x) \in V$ に対して $\varphi(p(x)) := (x-1)p'(x)$ と定める. ただし, $p'(x)$ は形式的な微分である. このとき, φ は V 上の一次変換になることを示せ. (注: V への写像になることも確認すること.)

- (4) (2) の基底に関する φ の表現行列を求めよ.

- (5) φ の像と核の次元を求めよ. また, φ は全単射であるかどうか判定せよ.

- (6) φ のすべての固有値と各固有値に対する固有ベクトルを一つ求めよ.

6. U を閉区間 $[-\pi, \pi]$ 上の複素数値連続関数全体からなる複素ベクトル空間とする. $f_1, f_2 \in U$ を $f_1(x) = \cos 2x, f_2(x) = \sin x \cos x$ ($x \in [-\pi, \pi]$) と定めて, f_1, f_2 で生成される部分空間 $U(f_1, f_2)$ を考える. $U(f_1, f_2)$ 上の一次変換 φ を $\varphi(f) = f'$ と定めたとき, φ のすべての固有値と各固有値に対する固有ベクトルを一つ求めよ. ただし, f' は微分である.

7. A を「すべての固有値が非負であるエルミート行列」とする. このとき, 「すべての固有値が非負であるエルミート行列 B 」が存在して

$$B^2 = A$$

となることを示せ. また, このような B は唯一つであることを示せ.