ベクトル空間と行列の対角化（線形代数学 II）　期末試験
2017/2/13

注：解答用紙は裏も使ってよいが, 解答用紙の順番を右上に明記すること.
　一週間以内に数理科学の掲示板に結果とレポート等について掲示するので必ず確かめること.
　(大学のメールもチェックしてください.)

1. a を実数の定数とする. このとき, 次の連立一次方程式は解を持つかどうか判定し, 持つならば全ての実数解を求めよ.

$$\begin{cases} 3x_1+6x_2-6x_3+3x_4=2a+6 \\ x_1+4x_2-2x_3+2x_4=a+5 \\ 2x_1-4x_3=-a-2 \\ x_1+2x_2-2x_3+x_4=a+2 \end{cases}$$

2. 次のベクトルの組を Gram-Schmidt の方法で正規直交化せよ. (内積は $\mathbb{C}^3$ の (標準) 内積である.)

$$\begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

3. 次の行列が対角化できるかどうか判定し, 対角化できるならば対角化せよ.

$$(1)\ \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -2 & 3 & 1 \\ -4 & 2 & 4 \end{pmatrix} \qquad (2)\ \begin{pmatrix} 5 & -2 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 4 & -3 & -1 \end{pmatrix}$$

4. 次の行列がユニタリ行列で対角化できる理由を述べ, ユニタリ行列で対角化せよ.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

5. $V := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a,b,c,d \in \mathbb{C} \right\}$ と定める. V は行列の和と複素数倍で複素線型空間になる.

(1) $W := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in V \mid a+d=0 \right\}$ と定める. W は V の部分空間であることを示せ.

(2) W の基底を一組挙げ, W の次元を求めよ. (注：挙げたものが基底になることも証明すること.)

(3) 任意の $A \in W$ に対して,

$$\varphi(A) := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

と定める. φ は W の線型変換であることを示せ. (注：W への写像になることも確認すること.)

(4) (2) の基底に関する φ の表現行列を求めよ.

(5) φ のすべての固有値と各固有値に対する固有空間の基底を一組ずつ求めよ.

6. 複素線型空間 $V = \{p(x) \mid p(x)$ は高々3次の複素係数多項式$\}$ を考える. V の線型変換 φ を, $\varphi(p(x)) := p'(x)$ と定める. ただし, $p'(x)$ は形式的な微分である. このとき, φ の核と像の次元を求めよ. また, φ は全単射であるかどうか判定せよ.

7. A と B を n 次正方行列とする.

(1) 0 が AB の固有値ならば 0 は BA の固有値でもあることを示せ.

(2) 一般に λ を複素数とする. λ が AB の固有値ならば λ は BA の固有値でもあることを示せ.