三 角 級 数 と 擬 測 度

米田　薫　（大阪府立大学・名誉教授)

2016.8.23

古典的フーリエ級数について思い返してみたい。

$f(x)$ を周期が 2π である $L[-\pi,\pi)$ である関数とするとき、$f(x)$ を三角級数を使って表現できるとしたのが、そもそもの始まりであった。その表現は次のようである。

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx} \quad \text{ただし} \quad c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-int}dt \quad (n = 0 \pm 1, \pm 2, \cdots)$$

右辺の級数を $f(x)$ のフーリエ級数と呼んでいる。 最初の古典的なフーリエ級数の問題は、右辺のフーリエ級数が $f(x)$ に収束するか、というものであった。この問題については永い研究の歴史があり、すでに古典となっている多くの深い研究成果がある。この研究は関数からフーリエ級数を導き、関数との関係を探るものである。（以上については [Z] 参照）

一方、フーリエ級数であれば、$\lim_{n\to\pm\infty} c_n = 0$ でなければならないことがすでに分かっている。そうすれば、係数 c_n がこの条件を満たさなければ、もはや古典的な意味でのフーリエ級数にはなりえない。では、この三角級数 $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$ は <u>何のフーリエ級数になっているのか</u> を知りたいと思うのは自然であろう。

例えば、$c_n \equiv 1$ であれば、この級数は超関数であるディラック関数のフーリエ級数になっているとみるのが妥当である。では、一般に $\{c_n\}_n$ をある程度自由に与えたとき、（例えば　$c_n = e^n$）三角級数 $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$ はどうなのであろうか。

フーリエ解析には古典的な三角関数よりなるフーリエ解析の他に様々異種があるが、その中でもよく古典的なフーリエ解析と対比されるのがウォルシュ・フーリエ解析である。ウォルシュ･フーリエ解析の研究経過を見ると、最初は三角級数やフーリエ級数との類似性を論じ、それらがほぼ成り立つことを示している。すなわち、古典的フーリエ解析の結果を追っている姿が見えてくる。それらの中でウォルシュ・フーリエ解析が先んじた結果の一つが <u>任意のウォルシュ級数はある種の測度のウォルシュ・フーリエ級数になっている</u> こ

とであった。さらにこの結果は必要十分である。このある種の測度は擬測度 (quasi measure) と呼ばれ、一般の測度を含むより広い概念になっている。（以上については [SWS] 参照）

以上より、ウォルシュ・フーリエ解析から古典的フーリエ解析を見たとき、逆に三角級数が何等かの測度らしきもののフーリエ級数になっているのではないかと考えるのは自然であろう。

著者はすでに [Y-1,2] でフーリエ変換についてこの考えに従って得られた結果について述べてきた。今回は一般の三角級数についての試みについて述べたい。

参 考 文 献

[SWS] F.Shipp,W.R.Wade, P.Simon *Walsh series* Adam Hilger, Bristol and New York, 1990.

[Y-1] K. Yoneda フーリエ解析に関連する擬測度 （実解析学シンポジウム２０１１、信州大学・工学部、２０１１．１１．４－６）

[Y-2] —— フーリエ解析に関連する擬測度（続）（実解析学シンポジウム２０１２、茨城大学・理学部、２０１２．１０．２６－２８）

[Z] A. Zygmund *Trigonometric series* Cambridge University Press, 1959.

ルベーグ・スティルチェス測度の微分法

伊東由文 (徳島大学名誉教授)

1 次元ユークリッド空間 $\boldsymbol{R}$ において, 完全加法的集合関数の微分法について考察する.

不定積分と微分の関係は完全加法的集合関数と微分の関係と考えられる.

$\boldsymbol{R}$ 上の完全加法的集合関数の微分に関しては, LS 測度の微分の問題を研究すればよい.

ここで考える関数 $f(x)$ は $[a,\ b]$ においてルベーグ可積分であるとする.

定理 1　原始関数

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt,\ (x \in [a,\ b])$$

は $[a,\ b]$ において絶対連続な有界変動関数である. このとき, $[a, b]$ 上の LS 測度 $F(e)$ が定義されて, 等式

$$F([a, b]) = \int_a^b f(x)dt = F(b) - F(a)$$

が成り立つ.

いま, $E = (a,\ b)$ とおいて, E 上のルベーグ測度空間を $(E,\ \mathcal{M}_E,\ \lambda)$ と表す.

まず, $y = f(x),\ (a < x < b)$ の微分法の概念を思い出す.

いま, E 上の LS 測度 $F(e)$ が定義されていて, $e = [x,\ x + \Delta x]$ のとき, 条件

$$F([x,\ x + \Delta x]) = f(x + \Delta x) - f(x)$$

を満たしているとする. このとき,

$$\lambda([x,\ x + \Delta x]) = |\Delta x|$$

が成り立っている. したがって, $y = f(x)$ の導関数に対して, 等式

$$\lim_{\lambda([x,\ x+\Delta x])\to 0} \frac{F([x,\ x + \Delta x])}{\lambda([x,\ x + \Delta x])} = \lim_{|\Delta x|\to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{|\Delta x|} = f'(x)$$

が成り立つ.

この関係式を一般化して, 一般の LS 測度の導関数の定義を与える.

一般に, $(E,\ \mathcal{M}_E,\ \lambda)$ において定義された LS 測度 $F(e)$ を考える.

各点 $x \in E$ に対し, e は x を中心とする立方体と E の共通部分であるとする. e が x に収束するとき, 極限

$$D_F(x) = \lim_{e\to x} \frac{F(e)}{\lambda(e)}$$

を LS 測度 $F(e)$ の**導関数**であると定義する.

上の導関数の定義において, 「e が x に収束する」という表現には数学的に厳密な定義が必要である.

定理 2(ルベーグの定理)　$(\boldsymbol{R}^d,\ \mathcal{M},\ \lambda)$ はルベーグ測度空間であるとする．このとき，$\mathcal{M}$ 上定義された任意の LS 測度 F は, ほとんどいたるところで微分可能である．

関数 $f(x)$ は $\boldsymbol{R}^d$ 上のルベーグ可積分関数であると仮定する．このとき, $e \in \mathcal{M}$ に対して, 集合関数 $F(e)$ をルベーグ積分

$$F(e) = \int_e f(x) d\lambda(x)$$

によって定義する．ここで, $\mathcal{M}$ 上定義された完全加法的集合関数 $F(e)$ を関数 $f(x)$ の**不定積分**であると定義する．これはLS 測度になっている．

定理 3　関数 $f(x)$ は $\boldsymbol{R}^d$ 上のルベーグ可積分関数であるとする．このとき,

$$F(e) = \int_e f(x) d\lambda(x)$$

に対し, 不定積分の微分法の公式

$$D_F(x) \simeq f(x),\ (x \in \boldsymbol{R}^d)$$

が成り立つ.

定理 4　LS 測度 $F(e)$ の微分 $D_F(x)$ は $\boldsymbol{R}^d$ 上のルベーグ可積分関数であって, $F(e)$ は $D_F(x)$ の不定積分と一つの特異測度の和に等しい．すなわち, $\lambda(H) = 0$ となるルベーグ可測集合 H が存在して, 等式

$$F(e) = F(e \cap H) + \int_e D_F(x) d\lambda(x),\ (e \in \mathcal{M})$$

が成り立つ.

系 1　LS 測度 $F(e)$ が λ に関して絶対連続であるとすると, 等式

$$F(e) = \int_e D_F(x) d\lambda(x),\ (e \in \mathcal{M})$$

が成り立つ.

定理 3 と系 1 は, ルベーグ積分論において, 微分と積分が互いに逆演算の関係にあることの究極の表現である.

(2016.4.17)

参考文献

[1]　伊東由文, 測度論 ・積分論, サイエンスハウス, 2002.

[2]　———, RS 積分と LS 積分, プレプリント, 2011.

[3]　高木貞治, 定本 解析概論, 岩波書店, 2010.

HENSTOCK-KURZWEIL 積分の主値

川﨑敏治

日本大学工学部
(E-mail: toshiharu.kawasaki@nifty.ne.jp)

Henstock-Kurzwel 積分は、積分区間に関して連続である。即ち、

(i) f が任意の区間 $[\alpha, \beta] \subset (a, b)$ で Henstock-Kurzweil 積分可能で、

$$A = \lim_{\alpha \downarrow a, \beta \uparrow b} (HK) \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx$$

が存在するならば、f は $[a, b]$ 上で Henstock-Kurzweil 積分可能であり、

$$A = (HK) \int_{a}^{b} f(x) dx$$

(ii) f が任意の $[a, \alpha] \subset [a, c)$ 上で Henstock-Kurzweil 積分可能で、

$$A = \lim_{\alpha \uparrow c} (HK) \int_{a}^{\alpha} f(x) dx$$

が存在し、且つ、f が任意の $[\beta, b] \subset (c, b]$ 上で Henstock-Kurzweil 積分可能で、

$$B = \lim_{\beta \downarrow c} (HK) \int_{\beta}^{b} f(x) dx$$

が存在するならば、f は $[a, b]$ 上で Henstock-Kurzweil 積分可能であり、

$$A + B = (HK) \int_{a}^{b} f(x) dx$$

等々、が成り立つ。故に、Henstock-Kurzweil 積分には、所謂、広義積分は存在しない。

一方、Riemann 積分等には広義積分を考えることができるが、その時、区間の両端や区間内の特異点における収束は、上記のように独立に考える。勿論、極限は存在しない場合も有り得る。簡単な例として $f(x) = \frac{1}{x}$ を考えれば、

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x} = \lim_{\alpha \uparrow 0, \beta \downarrow 0} \left(\int_{-1}^{\alpha} \frac{dx}{x} + \int_{\beta}^{1} \frac{dx}{x} \right)$$

は収束しない。このような場合でも、Cauchy の主値

$$\text{p.v.} \int \int_{-1}^{1} \frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \left(\int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{dx}{x} + \int_{\varepsilon}^{1} \frac{dx}{x} \right)$$

を考えることが出来る。値は存在して 0 である。

上記の例 $f(x) = \frac{1}{x}$ は Henstock-Kurzweil 積分可能でもない。従って、その主値を考えることに意味はあると思われる。本講演では、まず Henstock-Kurzweil 積分の主値を以下のように定義する：

2010 *Mathematics Subject Classification.* Primary 26A36; Secondary 26A39.

Key words and phrases. Henstock-Kurzweil integral, principal value.

$f:[a,b]\longrightarrow$ の区間 $[a,b]$ 上の Henstock-Kurzweil 積分の主値が A であるとは、(a,b) 内の狭義単調増加な点列 $\{a_k \mid k=1,2,\cdots,n\}$ が存在して、

$$\lim_{\varepsilon_k\downarrow 0(k=0,1,2,\cdots,n)}\left((HK)\int_{a+\varepsilon_0}^{a_1-\varepsilon_1} f(x)dx+\sum_{k=1}^{n-1}(HK)\int_{a_k+\varepsilon_k}^{a_{k+1}-\varepsilon_{k+1}} f(x)dx+(HK)\int_{a_n+\varepsilon_n}^{b-\varepsilon_0} f(x)dx\right)=A$$

が成り立つことである。この時、

$$A=\mathrm{p.v.}(HK)\int_a^b f(x)dx$$

と記述する。

次に、この定義と同値な Riemann 型定義を与え、更に、Saks-Henstock lemma やその他の性質について述べる。

ファジィ測度に対する concave および convex integrals とその L_p 空間の準距離構造

本田あおい (九工大情報工)*1
岡崎 悦明 (ファジィシステム研究所)*2

ファジィ測度に関する concave-integral および convex-integral により L_p 空間を定義する．これらの L_p 空間は自然な平行移動不変な準距離構造を持つ線形空間である．

定義 1 T を集合とする．関数 $\rho(x,y) : T \times T \to [0,+\infty)$ が準距離とは

1. $\rho(x,y) \geq 0, \quad \rho(x,y) = 0 \iff x = y, \quad x,y \in T,$
2. $\rho(x,y) = \rho(y,x), \quad x,y \in T,$
3. $\exists K \geq 1 \; ; \; \rho(x,y) \leq K\left(\rho(x,z)+\rho(z,y)\right), \quad x,y,z \in T$

が満たされること．

定義 2 ([6]) $(X,\mathcal{B}(X))$ を測度空間とする．集合関数 $\mu : \mathcal{B}(X) \to [0,+\infty]$ が **単調測度 (ファジィ測度)** とは

1. $\mu(\emptyset) = 0,$
2. $A \subset B,\ A,B \in \mathcal{B}(X)$ ならば $\mu(A) \leq \mu(B)$ (単調性)

が成り立つこと．μ が **劣加法的** とは

3. $\mu(A \cup B) \leq \mu(A) + \mu(B),\ A,B \in \mathcal{B}(X)$

を満たすこと．

非負可測関数 $f : (X,\mathcal{B}(X)) \to [0,+\infty)$ に対してその **concave-integral** および **convex-integral** を次で定義する．

concave-integral([5]):

$$\mathbf{cav}(f) := \sup\left\{ \sum_{i=1}^{n} a_i \mu(A_i) \;\middle|\; n \in I\!N, A_i \in \mathcal{B}(X), 0 \leqq a_i \leqq +\infty, \sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{A_i} \leqq f \right\}.$$

convex-integral([4]):

$$\mathbf{cex}(f) := \inf\left\{ \sum_{i=1}^{n} a_i \mu(A_i) \;\middle|\; n \in I\!N, A_i \in \mathcal{B}(X), 0 \leqq a_i \leqq +\infty, \sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{A_i} \geqq f \right\}.$$

命題 1

(1) $f = 0 \ \mu - a.e. \ \Rightarrow \mathrm{cav}(f) = 0.$
(2) $f \leqq g \ \Rightarrow \mathrm{cav}(f) \leqq \mathrm{cav}(g).$
(3) $\mathrm{cav}(\chi_A) \geqq \mu(A).$
(4) 定数 $c > 0$ に対して $\mathrm{cav}(cf) = c \cdot \mathrm{cav}(f).$

本研究は科研費 (課題番号 : 26400155, 15K05003) の助成を受けたものである。
*1 e-mail: aoi@ces.kyutech.ac.jp
*2 e-mail: okazaki@flsi.or.jp

(5) $f, g \geqq 0$ に対して $\mathrm{cav}(f+g) \geqq \mathrm{cav}(f)+\mathrm{cav}(g)$ [concavity].

命題 2

(1) $f=0\ \mu - a.e.\ \Rightarrow \mathrm{cex}(f)=0.$

(2) $f \leqq g\ \Rightarrow \mathrm{cex}(f) \leqq \mathrm{cex}(g).$

(3) $\mathrm{cex}(\chi_A) \leqq \mu(A).$

(4) 定数 $c>0$ に対して $\mathrm{cex}(cf)=c\cdot\mathrm{cex}(f).$

(5) $f, g \geqq 0$ に対して $\mathrm{cex}(f+g) \leqq \mathrm{cex}(f)+\mathrm{cex}(g)$ [convexity].

CONCAVE L_p SPACE:

$1 \leqq p < +\infty$ とする．可測関数 $f:(X,\mathcal{B}) \to I\!R$ に対して $|f|_p := (\mathrm{cav}(|f|^p))^{\frac{1}{p}}$ とし，$\mathcal{L}_p(\mathrm{cav}) := \{f \mid |f|_p < +\infty\}$, $\mathcal{N}_p(\mathrm{cav}) := \{f \in \mathcal{L}_p \mid f=0\ \mu - a.e.\}$ とする．$L_p(\mathrm{cav}) = \mathcal{L}_p(\mathrm{cav})/\mathcal{N}_p(\mathrm{cav})$ とし代表元 $f+\mathcal{N}_p(\mathrm{cav}) \in L_p(\mathrm{cav})$ に対し $\|f+\mathcal{N}_p(\mathrm{cav})\|_p := |f|_p$ とする．μ を劣加法的とするとこの定義は well defined である)．

定理 1 μ を劣加法的とする．このとき $(L_p(\mathrm{cav}), \|f\|_p)$ は線形準距離空間である．$\rho_p(f,g) := \|f-g\|_p$ は平行移動不変準距離で次を満たしている．

(1) $\|cf\|_p = |c|\|f\|_p,\ c \in I\!R, f \in L_p(\mathrm{cav}).$

(2) $\rho_p(f,g) \leqq 2\left(\rho_p(f,h)+\rho_p(h,g)\right),\ f,g,h \in L_p(\mathrm{cav}).$

CONVEX L_p SPACE:

$1 \leqq p < +\infty$ とする．可測関数 $f:(X,\mathcal{B}) \to I\!R$ に対して $|f|_p := (\mathrm{cex}(|f|^p))^{\frac{1}{p}}$ とし，$\mathcal{L}_p(\mathrm{cex}) := \{f \mid |f|_p < +\infty\}$, $\mathcal{N}_p(\mathrm{cex}) := \{f \in \mathcal{L}_p \mid f=0\ \mu - a.e.\}\}$ とする．$L_p(\mathrm{cex}) = \mathcal{L}_p(\mathrm{cav})/\mathcal{N}_p(\mathrm{cex})$ とし代表元 $f+\mathcal{N}_p(\mathrm{cex}) \in L_p(\mathrm{cex})$ に対し $\|f+\mathcal{N}_p(\mathrm{cex})\|_p := |f|_p$ とする．この定義は well-defined である．

定理 2

μ を劣加法的とする．このとき $(L_p(\mathrm{cex}), \|f\|_p)$ は線形準距離空間である．$\rho_p(f,g) := \|f-g\|_p$ は平行移動不変準距離で次を満たしている．

(1) $\|cf\|_p = |c|\|f\|_p,\ c \in I\!R, f \in L_p(\mathrm{cex}).$

(2) $\rho_p(f,g) \leqq 2\left(\rho_p(f,h)+\rho_p(h,g)\right),\ f,g,h \in L_p(\mathrm{cex}).$

参考文献

[1] 本田あおい, 岡崎悦明, ファジィ測度の作る L_p 空間の準距離, 第20回曖昧な気持ちに挑むワークショップ講演論文集, pp. 59–60, 2015.

[2] 本田あおい, 岡崎悦明, 劣加法的測度の作る L_p 空間と双対 $L_p^\dagger$，2016 日本数学会年会，実函数論分科会講演，2016年3月18日 (筑波大学).

[3] 本田あおい, 岡崎悦明, 劣加法的測度に対する Shilkret-菅野 型積分とその L_p 空間，2016 日本数学会年会秋季総合分科会，実函数論分科会講演，2016年9月17日 (関西大学).

[4] E.P. Klement, J. Li, R. Mesiar and E. Pap, *Integrals based on monotone set functions*, Fuzzy Sets and Systems, **281** (2015), 88–102.

[5] E. Lehrer, *A new integral for capacities*, Econom. Theory, **39** (2009), 157–176.

[6] 室伏俊明・菅野道夫 ：ファジィ測度, 講座ファジィ3，日刊工業新聞社，1991.

有限フォン・ノイマン環における Tingley 問題の解法について

田中亮太朗　（九州大）

関数空間, 或いは作用素空間上の等距離線形写像に関する preserver problems の研究は, 長く豊富な歴史を持ち, 多くの有用な理論や結果を提供してきた. 例えば, コンパクトハウスドルフ空間上の連続関数空間における等距離線形同型写像の構造を決定する Banach-Stone の定理は, preserver problems の研究における初期の重要かつ典型的な結果と言える. 1951 年にはこの定理の非可換版が Kadison [3] により与えられ, C^*-環の間の等距離線形同型写像が実は Jordan $*$-同型写像であることが示された. 言い換えれば, C^*-環の間の線形同型写像の中で距離を「保存 (preserve)」するものは, それらの Jordan 代数構造をも保存する. これは, 線形・距離・Jordan 代数等 C^*-環に自然に含まれる構造が, 互いに密接に関わっていることを意味している. このように, (linear) preserver problem の研究とは, 線形構造を含む対象内のいくつかの構造間に働く相互作用の研究であり, 他にもいくつかの重要な問題設定が存在する.

一方, 最近の preserver problems 研究の主流は, non-linear preserver problems という新たな方向へと進みつつある. そのような設定においては, 対象とされる写像の線形性はもはや仮定されない. にもかかわらず, 我々は, バナッハ空間の間の全射等距離写像がすべてアフィン写像であること (Mazur-Ulam の定理) 等, 多くの有用な結果を持つ. アフィン写像が実線形写像の平行移動であることに注意すれば, バナッハ空間の実線形構造は, その距離構造により支配されているとも言い換えられる. 1972 年には Mankiewicz [4] が, バナッハ空間の開連結集合間の全射等距離写像が一意にアフィン拡張可能であることを示し, Mazur-Ulam の定理の局所化に成功した. この結果が示すように, preserver problem を考える上で, (ベースは線形空間ではあるが) もはや対象が線形構造を持つ必要はない. この方向性で, これまでに様々な non-linear preserver problem が考案され, 研究されてきた [1, 2, 5].

上述の Mankiewicz の定理の一つの結論として, 二つのバナッハ空間の単位球の間の全射等距離写像は, 常に実線形等距離同型写像に拡張可能である. このことから, Tingley [9] は, Mazur-Ulam 型の定理のさらなる局所化として次の問題を提起した. バナッハ空間 X に対して, S_X はその単位球面を表すものとする.

Problem 1 (Tingley's problem)**.** Let X, Y be Banach spaces, and let $T : S_X \to S_Y$ be a surjective isometry. Does exist a real-linear isometric isomorphism $\widehat{T} : X \to Y$ such that $\widehat{T}|_{S_X}$?

本講演の目的は, 有限フォン・ノイマン環において Tingley 問題を肯定的に解決することである. これは, 作用素環上の Tingley 問題に関する既知の結果 [6, 7] を大きく拡張する. このため, まずは C^*-環の単位球の maximal proper faces について考える. そのとき, 次を得る.

Proposition 2. Let $\mathfrak{A}$ be a C^*-algebra, and let ρ be a pure state of $\mathfrak{A}$. Then $F(\rho) :=$

$\rho^{-1}(1) \cap B_{\mathfrak{A}}$ is a maximal proper face of $B_{\mathfrak{A}}$.

応用として, 有限フォン・ノイマン環の単位球のすべての weak-operator closed proper face が, maximal proper faces の共通部分として表せることがわかる. これに基づいて [6, 7] における方法を発展させることで, 有限フォン・ノイマン環における Tingley 問題について次の解答を得る.

Theorem 3. Let $\mathcal{R}_j$ be a finite von Neumann algebra, $j = 1, 2$. If $T : S_{\mathcal{R}_1} \to S_{\mathcal{R}_2}$ is a surjecitve isometry, then there exist a central projection P in $\mathcal{R}_2$ and a Jordan $*$-isomorphism $J : \mathcal{R}_1 \to \mathcal{R}_2$ such that

$$T(A) = T(I)(PJ(A) + (I - P)J(A)^*)$$

for each $A \in S_{\mathcal{R}_1}$.

最後に, 本講演で与えられる方法が一般のフォン・ノイマン環に対しては（無限 I 型因子にさえ）適用できないことに注意する.

参考文献

[1] G. P. Gehér and P. Šemrl, *Isometries of Grassmann spaces*, J. Funct. Anal., **270** (2016), 1585–1601.

[2] O. Hatori and L. Molnár, *Isometries of the unitary groups and Thompson isometries of the spaces of invertible positive elements in C^*-algebras*, J. Math. Anal. Appl., **409** (2014), 158–167.

[3] R. V. Kadison, *Isometries of operator algebras*, Ann. of Math. (2), **54** (1951), 325–338.

[4] P. Mankiewicz, *On extension of isometries in normed linear spaces*, Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys., **20** (1972), 367–371.

[5] L. Molnár and P. Šemrl, *Transformations of the unitary group on a Hilbert space*, J. Math. Anal. Appl., **388** (2012), 1205–1217.

[6] R. Tanaka, *The solution of Tingley's problem for the operator norm unit sphere of complex $n \times n$ matrices*, Linear Algebra Appl., **494** (2016), 274–285.

[7] R. Tanaka, *Spherical isometries of finite dimensional C^*-algebras*, J. Math. Anal. Appl, published online.

[8] R. Tanaka, *Tingley's problem on finite von Neumann algebras*, submitted.

[9] D. Tingley, *Isometries of the unit sphere*, Geom. Dedicata, **22** (1987), 371–378.