On Kôno's self-affine functions and space-filling curves

村本克志 (河合塾)　関口健 (東北学院大名誉教授)

Kôno's self-affine function は、[2] で Peano curve の座標関数をモデルに一般化されたものとして定義され、[3] で scale parameter, base で特徴づけされ、更に展開表現があたえられた。本発表では、有向ネットワーク上の関数方程式系の立場から、Kôno's self-affine function を再考し、space-filling curve との関連についても再考する。

参考文献

[1] 村本 克志, 関口 健, 有向ネットワーク上の *de Rham* 型関数方程式系について, 実解析シンポジウム 2015 報告集 (2016).

[2] N. Kôno, *On self-affine functions*, Japan J. Appl. Math., 3(1986), 259–269.

[3] N. Kôno, *On self-affine functions II*, Japan J. Appl. Math., 8(1988), pp. 441–445.

間隔を空けてずらした数列を指数にもつ複素指数関数系の Riesz basis 性

中村　昭宏
東海大学清水教養教育センター

複素指数関数系 $\{e^{i\lambda_n t}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ における数列 $\{\lambda_n\}$ が, 整数からどれだけずれても Riesz basis となるかどうかの有名な結果は以下の Kadec's 1/4 定理である：

$$|\lambda_n - n| \leq L < \frac{1}{4},\ n = 0, \pm 1, \pm 2, ...,$$

を満たすならば, $\{e^{i\lambda_n t}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ は $L^2[-\pi,\pi]$ において Riesz basis になる．この定理が $L = 1/4$ のときは成り立たないことがよく知られている ：

$$\lambda_n = \begin{cases} n + \frac{1}{4}, & n > 0 \\ 0, & n = 0, \\ n - \frac{1}{4}, & n < 0, \end{cases} \tag{0.1}$$

について, 関数系 $\{e^{i\lambda_n t}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ は Riesz basis でない (RY[3, Theorem 4]) ．昨年のシンポジウムの休憩時間に岡田先生から, 上記の数列を部分列でずらしたらどうなるかといった質問を受けた．この質問は [2] で扱った関数系が Riesz basis となるのかどうかという問題と関係していると考えられる．例えば以下のような数列 $\{\lambda_n\}$ に対して, $\{e^{i\lambda_n t}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ は Riesz basis となるのかどうか：

$$\begin{cases} \lambda_0 = 0, & \\ \lambda_{2n} = 2n + \frac{1}{4}, & n > 0, \\ \lambda_{2n-1} = (2n-1) - \frac{1}{4}, & n > 0, \\ \lambda_{-n} = -\lambda_n, & n > 0, \end{cases}$$

または

$$\begin{cases} \lambda_0 = 0, & \\ \lambda_{2n} = 2n - \frac{1}{4}, & n > 0, \\ \lambda_{2n-1} = (2n-1) + \frac{1}{4}, & n > 0, \\ \lambda_{-n} = -\lambda_n, & n > 0. \end{cases}$$

本講演ではこれらの内容を含めた以下の結果を報告する.

Theorem Let $k \geq 2$ be a fixed integer and $\{\lambda_n\}$ be a sequence as follows,

$$\begin{cases} \lambda_0 = 0, & \\ \lambda_{kn} = kn + \alpha, & n > 0, \\ \lambda_{kn-m} = (kn - m) + \beta \ (m = 1, 2, \cdots, k-1), & n > 0, \\ \lambda_{-n} = -\lambda_n, & n > 0, \end{cases} \tag{0.2}$$

where α, β are constants such that

$$-\frac{3k}{2} < \alpha < \frac{k}{2},\ m - \frac{3k}{2} < \beta < m + \frac{k}{2}$$

and

$$\beta \neq \alpha + m - k,\ \alpha + m,\ \alpha + m + k \ (m = 1, 2, \ldots, k-1).$$

If $-k/4 < \alpha + \beta(k-1) < k/4$, then $\{e^{i\lambda_n t}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ is a Riesz basis for $L^2[-\pi, \pi]$.

参考文献

[1] Kheyfits A., *On the excess of sequences of complex exponentials*, Hokkaido Mathematical Journal, Vol.**33** (2004), 539 - 549.

[2] Nakamura A., *On the excess of a sequence of exponentials with perturbations at some subsequences of integers*, Hokkaido Mathematical Journal, Vol.**29**, No.2 (2000), 303 - 313.

[3] Redheffer R.M. and Young R.M., *Completeness and Basis Properties of Complex Exponentials*, Trans. Amer. Math. Soc. **277**(1983), 93 - 111.

[4] Sedletskii A.M., *Fourier Transforms and Approximations*, Gordon and Breach Science Publishers, 2000.

[5] Sedletskii A.M., *Nonharmonic Analysis*, Journal of Mathematical Sciences **116**(5) (2003) , 3551-3619.

Morrey spaces and Hilbert inequality

Yoshihiro Sawano (Tokyo Metropolitan University)

Here we demonstrate that Morrey spaces are useful when we consider some integral inequality. In fact, it really gives the constant which is not true for L^p spaces. Placing ourselves in a general setting of integral kernel, we consider some generalization together with a reduction to the L^p spaces. This is a joint work with Professor Batbold Tserendorj in Mongolia.

非線形積分収束定理への摂動法による統一的アプローチ

河邊　淳 (信州大学工学部)

1　はじめに

Lebesgue 積分の単調収束定理は，積分の収束定理のなかで中心的な役割を果たしている．実際，Fatou 補題，優収束定理などの他の収束定理は単調収束定理から導かれる．本発表では，非加法的測度の積算概念として重要な Choquet，Šipoš，Sugeno，Shilkret 積分がもつ共通的な性質の一つである “摂動性” に着目し，これら非線形積分の単調収束定理を統一的に議論する方法論を提示する．この方法論は，非線形積分の有界収束定理や一様可積分性による収束の特徴付け，さらには，非加法的測度の弱収束に関する (一様) 収束性の議論にも適用可能である．

2　非線形積分汎関数

X は空でない集合，$\mathcal{A}$ は X の部分集合からなる集合体とする．関数 $f\colon X \to [0,\infty]$ は，任意の $t \in \mathbb{R}$ に対して，$\{f \geq t\}, \{f > t\} \in \mathcal{A}$ のとき **$\mathcal{A}$-可測**といい，その全体を $\mathcal{F}^+(X)$ で表す．集合関数 $\mu\colon \mathcal{A} \to [0,\infty]$ は，(i) $\mu(\emptyset) = 0$，(ii) $A \subset B$ ならば $\mu(A) \leq \mu(B)$ のとき**非加法的測度**といい，その全体を $\mathcal{M}(X)$ で表す．χ_A で集合 A の定義関数を表す．次の非線形積分は，非加法的測度論とその応用領域で広く用いられている．

定義 1.　$(\mu, f) \in \mathcal{M}(X) \times \mathcal{F}^+(X)$ とする．

(1) **Choque 積分**: $\mathrm{Ch}(\mu, f) := \displaystyle\int_0^\infty \mu(\{f \geq t\})dt$

(2) **Šipoš 積分**: $\mathrm{Si}(\mu, f) := \lim_{P \in \varDelta^+} \sum_{i=1}^n (a_i - a_{i-1})\mu(\{f \geq a_i\})$．ただし，$\varDelta^+$ は分割 $P = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ $(0 = a_0 < a_1 < \cdots < a_n < \infty)$ 全体に集合の包含関係で定まる順序を導入した有向集合．

(3) **Sugeno 積分**: $\mathrm{Su}(\mu, f) := \sup_{t \in [0,\infty]} \big[t \wedge \mu(\{f \geq t\})\big]$

(4) **Shilkret 積分**: $\mathrm{Sh}(\mu, f) := \sup_{t \in [0,\infty]} \big[t \cdot \mu(\{f \geq t\})\big]$

3　積分汎関数の摂動性

以下では，$I\colon \mathcal{M}(X) \times \mathcal{F}^+(X) \to [-\infty,\infty]$ は**積分汎関数**，すなわち，(i) 任意の $\mu \in \mathcal{M}(X)$ に対して $I(\mu, 0) = 0$，(ii) 任意の $\mu \in \mathcal{M}(X)$，$f, g \in \mathcal{F}^+(X)$ に対して，$f \leq g$ ならば $I(\mu, f) \leq I(\mu, g)$ を満たすとする．また，$\varphi(0) = \lim_{t \to +0} \varphi(t) = 0$ を満たす関数 $\varphi\colon [0,\infty) \to [0,\infty)$ 全体を $\varPhi$ で表し，$\varPhi$ に属する関数を**制御関数**とよぶ．

定義 2.　$\mu, \nu\colon \mathcal{A} \to [0,\infty]$ は集合関数，$f, g \in \mathcal{F}^+(X)$ とする．各 $t \in \mathbb{R}$ で $\mu(\{f \geq t\}) \leq \nu(\{g \geq t\})$ のとき，(μ, f) は (ν, g) により**支配される**といい，$(\mu, f) \prec (\nu, g)$ とかく．

定義 3.　積分汎関数に関する 以下の性質は，非線形積分の収束定理の統一的議論に必要となる．

(1) 関数 $\theta\colon [0,\infty]^2 \to [0,\infty]$ が存在して，任意の $\mu \in \mathcal{M}(X)$，$r \in [0,\infty]$，$A \in \mathcal{A}$ に対して，$I(\mu, r\chi_A) = \theta(r, \mu(A))$ のとき，I は**生成的**，θ を I の**生成器**という．

(2) I は生成的で，θ をその生成器とする．擬加法 $\oplus\colon [0,\infty]^2 \to [0,\infty]$ が存在して，任意の $\mu \in \mathcal{M}(X)$，$n \in \mathbb{N}$，$r_1,\ldots,r_n \in (0,\infty)$，$A_1,\ldots,A_n \in \mathcal{A}$ に対して，$0 = r_0 < r_1 < \cdots < r_n$ かつ $A_1 \supset \cdots \supset A_n$ ならば

$$I\left(\mu, \bigoplus_{i=1}^{n} (r_i \ominus r_{i-1})\,\chi_{A_i}\right) = \bigoplus_{i=1}^{n} \theta\bigl(r_i \ominus r_{i-1}, \mu(A_i)\bigr)$$

のとき，I は**初等的**という．ただし，$\ominus\colon [0,\infty]^2 \to [0,\infty]$ は，$a \ominus b := \inf\{x \in [0,\infty] \colon b \oplus x \geq a\}$ で定まる (擬加法 $\oplus$ に関する) 擬減法である．

(3) 各 $p,q > 0$ に対して，制御関数 $\varphi_{p,q}, \psi_{p,q} \in \varPhi$ が存在して，次の摂動条件 (P) を満たすとき，I は**摂動的**という: (P) 任意の $\mu \in \mathcal{M}(X)$，$f,g \in \mathcal{F}^+(X)$，$\varepsilon \geq 0$，$\delta \geq 0$ に対して，$\|f\|_\mu < p$，$\|g\|_\mu < p$，$\mu(X) < q$，$(\mu,f) \prec (\mu+\delta, g+\varepsilon)$ ならば

$$I(\mu,f) \leq I(\mu,g) + \varphi_{p,q}(\delta) + \psi_{p,q}(\varepsilon).$$

ただし，$\|f\|_\mu := \inf\{r > 0 \colon \mu(\{f > r\}) = 0\}$ は f の μ-本質的ノルムである．

(4) 任意の $(\mu,f) \in \mathcal{M}(X) \times \mathcal{F}^+(X)$ に対して

$$I(\mu,f) = \sup\{I(\mu,h) \colon h \text{ は } \mathcal{A}\text{-可測単関数で } 0 \leq h \leq f\}$$

のとき，I は**内正則**という．固定した μ に対しては **μ-内正則**という．

(5) 任意の $(\mu,f) \in \mathcal{M}(X) \times \mathcal{F}^+(X)$ に対して，$I(\mu,f) = \sup_{r>0} I(\mu, f \wedge r)$ のとき，I は**上縁連続**という．固定した μ に対しては **μ-上縁連続**という．

命題 1． $\mathrm{Ch}, \mathrm{Si}, \mathrm{Sh} \colon \mathcal{M}(X) \times \mathcal{F}^+(X) \to [0,\infty]$ は初等的かつ摂動的で，生成器は $\theta(a,b) := a \cdot b$．一方，$\mathrm{Su} \colon \mathcal{M}(X) \times \mathcal{F}^+(X) \to [0,\infty]$ は初等的かつ摂動的で，生成器は $\theta(a,b) := a \wedge b$．さらに，これら非線形積分汎関数はすべて内正則かつ上縁連続.

4 単調収束定理

以下では，$I \colon \mathcal{M}(X) \times \mathcal{F}^+(X) \to [0,\infty]$ は積分汎関数とする．

定理 1 (単調増加収束定理)． 次の 2 つの条件を考える．

(i) μ は下から連続で，I は μ-内正則.

(ii) $I(\mu,\cdot)$ は単調増加収束定理を満たす．すなわち，任意の $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{F}^+(X)$ と $f \in \mathcal{F}^+(X)$ に対して，$f_n \uparrow f$ ならば $I(\mu,f_n) \to I(\mu,f)$.

I は初等的で，生成器 θ が**連続型**，すなわち，領域 $D := [0,\infty]^2 \setminus \{(0,\infty),(\infty,0)\}$ で連続であり，さらに擬減法 $\ominus$ が三角形領域 $T := \{(a,b) \in [0,\infty]^2 \colon a > b\}$ で連続ならば，(i)$\Rightarrow$(ii) が成立. I が生成的で，生成器 θ が極限保存的ならば，(ii)$\Rightarrow$(i) が成立.

定理 2 (単調減少収束定理)． 次の 2 つの条件を考える．

(i) μ は上から連続で，$I(\mu,f_1) < \infty$ を満たす任意の単調減少列 $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{F}^+(X)$ は I に関して **μ-切断的**，すなわち，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，$c > 0$ が存在して，任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して，$I(\mu,f_n) - \varepsilon \leq I(\mu, f_n \wedge c)$.

(ii) $I(\mu,\cdot)$ は単調減少収束定理を満たす．すなわち，任意の $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{F}^+(X)$ と $f \in \mathcal{F}^+(X)$ に対して，$f_n \downarrow f$ かつ $I(\mu,f_1) < \infty$ ならば $I(\mu,f_n) \to I(\mu,f)$.

μ が有限，I が初等的かつ摂動的で，生成器 θ が連続型ならば (i)$\Rightarrow$(ii) が成立．I が生成的かつ μ-上縁連続で，生成器 θ が極限保存的かつ有限型ならば，(ii)$\Rightarrow$(i) が成立.

包除積分—非加法的な測度による積分—

本田あおい　(九州工業大学情報工学部)*1
岡崎 悦明　　(ファジィシステム研究所)*2

1. はじめに

測度の加法性の仮定を外し非加法的測度とすることで加法的な測度では表現できない事柄を表現することができる．同値な概念は古くから数学の諸分野で独立に研究されてきたが, 非加法性を明確に意識し考察したのは1953年のChoquet [3] , 次にChoquetとは独立に1970年代の菅野によるものが端緒で, それぞれ capacity, fuzzy measure と呼んでいる [1, 2]. これ以後, 世界中で非加法的測度の研究が盛んになり, 呼称も non-additive measure, monotone measure, generalized measure 等と様々である．measure が set function にかわったり, 検討対象によって(特に全体集合が非加算集合である場合に) 下からの単調性や0-加法性が付加されることもあるが, どれもほぼ同一の概念である．協力ゲームは一般には単調性すら仮定しない測度で定式化される．ここでは単調性を仮定することを明確にするために, monotone measure と呼ぶことにする．monotone measure による積分としては通常のルベーグ測度流の積分論は適用できず, いくつかの新しい積分が提案されてきた．一方, Choquet が導入した capacityによる汎関数は, 積分に相当していることが明らかになり, Choquet 積分と呼ばれる．Choquet 積分は 扱いやすく, 性質もよいため多くの研究や応用がなされてきた．菅野は fuzzy measure を導入したときに既に積分も定義しており, これは菅野積分と呼ばれ, 特に近年になって多くの研究者により研究されている．因みに, 論文の被引用数の評価指標の一つである f-index は菅野積分に相当している．その後, いくつかの monotone measure による積分や積分のクラスが提案されている．

本講演では, monotone measure による包除積分を提案する．積分としての妥当な性質を持つことやデータ解析等の応用に役立つ別表現ができることを示す.

2. 包除積分の定義

定義 1 (monotone measure) 集合関数 $v : \mathcal{P}(\Omega) \to [0,1]$ が次の 1, 2 を満たす時, monotone measure とよぶ:

1. $v(\emptyset) = 0, v(\Omega) < +\infty$.　(有界性)
2. $A \subset B, A, B \in \mathcal{P}(\Omega)$ ならば $v(A) \leq v(B)$.　(単調性)

ただし $\mathcal{P}(\Omega)$ は Ω の部分集合全体.

定義 2 (Interaction operator) $\Omega = \{1, 2, \ldots, n\}$ を n 点からなる有限集合, $K \in (0, +\infty]$ とする．多変数関数 $I(\boldsymbol{x} \mid A) : [0,K]^n \to [0,K], A \in \mathcal{P}(\Omega)$ が次の 1, 2, 3 を満たすとき I を $[0,K]$ 上の interaction operator とよぶ:

1. $I(\boldsymbol{x} \mid \emptyset) = K$,

本研究は科研費 (課題番号:15K05003) の助成を受けたものである。
2010 Mathematics Subject Classification:　28B15, 05A19
キーワード : monotone measure, inclusion-exclusion integral, Möbius transformation, interaction operator
*1 e-mail: aoi@ces.kyutech.ac.jp
*2 e-mail: okazaki@flsi.or.jp

2. 任意の $|A|=1$ なる $A\in\mathcal{P}(\Omega)$ に対して I は座標関数, すなわち $I(\boldsymbol{x}\mid\{i\}):=x_i, i\in\Omega$,
3. 任意の $A\in\mathcal{P}(\Omega)$ に対して, $I(\boldsymbol{x}\mid A)\le\min\big\{I(\boldsymbol{x}\mid B)\big|B\subsetneq A\big\}$.

interaction operator には座標の入れ替えによる不変性は仮定しない.

以下, Ω を有限集合, v monotone measure, I を Ω 上の interaction operator, f を Ω 上の非負関数とする.

定義 3 (包除積分 [4]) f の v による包除積分を次で定義する:

$$(I)\int f\ dv := \sum_{A\in\mathcal{P}(\Omega)}\left(\sum_{B\supset A}(-1)^{|B\setminus A|}I(f\mid B)\right)v(A).$$

包除積分の名前は係数, $\sum_{B\supset A}(-1)^{|B\setminus A|}I(f\mid B)$ が包除原理に相当することに由来する. 包除積分は v が加法的であればルベーグ積分と同値であり, $I(\boldsymbol{x}\mid A):=\bigwedge_{i\in A}x_i$ とすると Choquet 積分と同値である.

3. 包除積分の意味

定理 4 (包除積分の係数の意味) χ_A を定義関数とする. このとき次が成り立つ:

$$\sum_{A\in\mathcal{P}(\Omega)}\left(\sum_{B\supset A}(-1)^{|B\setminus A|}I(f\mid B)\right)\chi_A=f,$$

定理4より, 包除積分の係数は被積分関数 f の分解になっていることがわかる. 被積分関数の分解を用いた単調測度による積分として Lehrer が提案した concave integral [5] は包除積分とは必ずしも一致しないが関係の深い積分である.

定理 5 (包除積分の別表現) 包除積分は v のメビウス変換を用いて次のように別表現できる.

$$(I)\int f\ dv=\sum_{A\in\mathcal{P}(\Omega)}I(f\mid A)\ m^v(A).$$

この別表現は, 加法性を k 次以下に制限した k-加法的測度としたときに式が簡単になるなど, データ解析等の応用研究の際に便利なことが多い. 包除積分をデータ解析に用いる場合には重回帰分析の場合に提案されている手法を同様に利用することが可能である. また, 重回帰分析では最小二乗法により決定したモデル式のパラメータが最尤推定量になっていることがよく知られているが, これは包除積分の場合も同様でである.

参考文献

[1] M. Sugeno, Fuzzy measures and fuzzy integrals–a survey, In: M. M. Gupta, G. N. Saridis and B. R. Gaines (eds), *Fuzzy automata and decision processes*, pp. 89–102, North Holland, Amsterdam, 1977.

[2] T. Murofushi and M. Sugeno, Fuzzy measures and fuzzy integrals, in: *Fuzzy Measures and Integrals: Theory and Applications*, M. Grabisch, T. Murofushi, and M. Sugeno, eds., pp. 3–41, Physica-Verlag, 2000.

[3] G. Choquet, Theory of capacities, *Ann. Inst. Fourier*, **5**, pp. 131–295, 1953.

[4] A. Honda, Y. Okazaki, Theory of inclusion-exclusion integral, preprint

[5] E. Lehrer, A new integral for capacities, *Econ. Theory*, **39**, pp.157-176, 2009.